Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. 2º Bachillerato.

Capítulo 4: Programación lineal

www.apuntesmareaverde.org.es

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés Menéndez

Revisor: Eduardo Cuchillo

Nos adentramos en el tema más *moderno* de todos los que se imparten en la asignatura de Matemáticas en el instituto. La **programación lineal** es una técnica matemática desarrollada durante la Segunda Guerra Mundial para reducir los costes de gestión y, como tal herramienta militar, se mantuvo en secreto hasta pocos años después del final de la guerra. Una vez *liberado* a la sociedad, es empleado por prácticamente todas las grandes empresas.

En este capítulo hablaremos de problemas simples con dos variables (x e y), si bien en la realidad se encuentran sistemas de más variables. En ese caso el procedimiento es complejo y se resuelve con medios informáticos, bien por el *Método Simplex* ideado por G. B. Danzig en 1951 o, más recientemente, con el algoritmo Karkamar o *método del punto interior*, desarrollado en 1984 por el matemático indio Narenda Karmarkar y que suele ser más eficiente que el Método Simplex.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

1. INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Una **inecuación lineal** con dos incógnitas es una expresión en la que dos expresiones lineales están relacionadas entre sí por una desigualdad.

En su forma reducida podemos encontrar cuatro tipos de inecuaciones lineales:

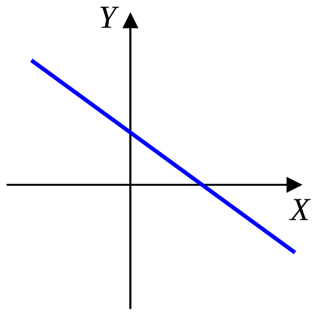
$$ax + by < c \qquad ax + by > c \qquad ax + by \leq c \qquad ax + by \geq c$$

Las dos primeras se denominan *desigualdades estrictas* y las dos últimas *desigualdades amplias*.

El método habitual para resolver las inecuaciones lineales es el **método gráfico**. La ecuación resultante de convertir la desigualdad en una igualdad:

$$ax + by = c$$

es una línea recta, y su representación gráfica divide al plano cartesiano en dos semiplanos:



Es trivial deducir que una de esas dos regiones cumplirá que $ax + by < c$ o que $ax + by > c$, por tanto:

La **solución** de una inecuación serán las coordenadas de los puntos (x_0, y_0) que verifican la desigualdad algebraica, y pertenecen a uno de los dos semiplanos definidos al representar la recta cuyas expresiones lineales a ambos lados de la igualdad coinciden con las de la inecuación planteada.

El **semiplano solución** puede ser **abierto** (no contiene a la recta) o **cerrado** (contiene a la recta) según la desigualdad sea estricta o no, respectivamente.

Desde el punto de vista práctico existen dos formas de averiguar qué semiplano representa la solución de la inecuación:

1. Tomamos un punto cualquiera del plano y vemos si sus coordenadas cumplen la inecuación.

   Si la cumplen, el semiplano donde se encuentra dicho punto será el conjunto solución de la inecuación. Si no es así, la región solución será el otro semiplano.

2. Analizamos los signos de los coeficientes y el sentido de la desigualdad:

Desigualdad:	$ax + by < c$	$ax + by \leq c$	$ax + by > c$	$ax + by \geq c$
$a > 0$	A la izquierda de la recta		A la derecha de la recta	
$a < 0$	A la derecha de la recta		A la izquierda de la recta	
$b > 0$	Por debajo de la recta		Por encima de la recta	
$b < 0$	Por encima de la recta		Por debajo de la recta	

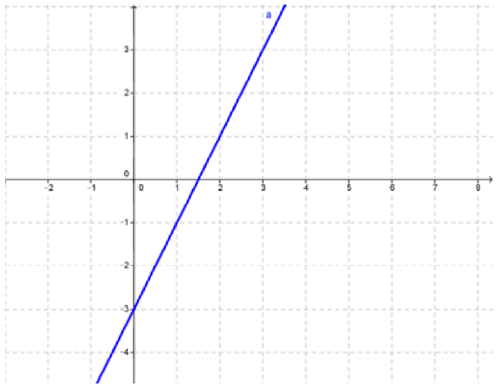
Basta con analizar un único signo, siendo más fácil analizar los coeficientes positivos.

Actividad resuelta

- Representa la región solución de la inecuación $2x - y > 3$.

Planteamos la recta $2x - y = 3$. Dando dos valores cualesquiera a una de las dos incógnitas y despejamos la otra tenemos las coordenadas de dos puntos de la recta, y la representamos:

$$2x - y > 3 \ \rightarrow 2x - y = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow -y = 3 \rightarrow y = -3 \\ y = 1 \rightarrow 2x - 1 = 3 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 : (0, -3) \\ P_2 : (1, 1) \end{cases}$$



Determinamos ahora el semiplano solución:

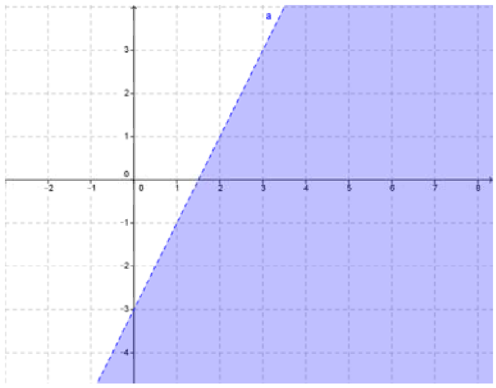
Método 1: Tomamos un punto que no esté sobre la recta, por ejemplo $(0,\ 0)$, que está a la izquierda de la recta. Sustituimos sus coordenadas en la inecuación:

$$2 \cdot 0 - 0 = 0 < 3$$

Vemos que **no** cumple la inecuación pues debería ser mayor que 3, por lo que este punto no pertenece al conjunto solución. Es decir, la solución de la inecuación es el otro semiplano, en el que no está el punto elegido (el de la derecha).

Método 2: El coeficiente de x es positivo y la desigualdad *apunta* hacia la derecha, por lo que el semiplano solución es el de la derecha.

Finalmente, decidimos que la recta no forma parte de la solución porque la desigualdad es estricta y, por tanto, la región solución es:



Actividad propuesta

1. Representa la solución gráfica de las inecuaciones siguientes:

$$x + 2y < 3 \qquad -x + 3y > 4 \qquad 2x - y \le -2 \qquad -x - y \ge 0$$

Indica en cada caso si el recinto solución es abierto o cerrado.

2. SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES

Un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas es el conjunto de dos o más inecuaciones que deben cumplirse a la vez.

Para resolver un sistema de inecuaciones lineales se procede de la manera siguiente:

- Se resuelve cada inecuación por separado, es decir, se encuentra el semiplano solución de cada una de las inecuaciones.
- El conjunto solución del sistema, también llamado **región factible**, está formado por la intersección o región común de las soluciones de todas las inecuaciones.

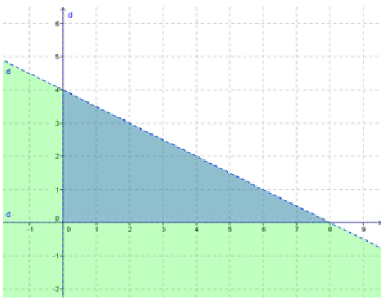
Actividades resueltas

- Dibuja las regiones factibles de los siguientes sistemas:

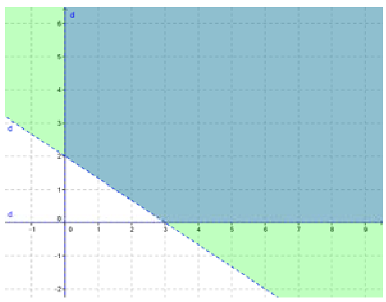
a) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + 2y < 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ 2x + 3y > 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y < -1 \end{cases}$

- En cada uno de los casos representamos las rectas asociadas a cada inecuación.
- Buscamos para cada una de las inecuaciones su semiplano de soluciones y, por último, la región común a todos los semiplanos.

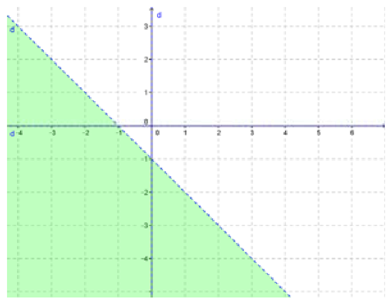
En las representaciones gráficas siguientes puede verse la región factible o región de soluciones de los sistemas (en verde la solución de la inecuación lineal, en azul la región factible):



a) Solución acotada



b) Solución no acotada



c) No posee solución.

En los ejemplos anteriores podemos ver los tres tipos de soluciones que podemos encontrar:

1. **Solución acotada**. Los puntos de la región factible están encerrados por un **polígono convexo**.
2. **Solución no acotada**. La región solución se extiende hasta el infinito.
3. **Sin solución**. Las condiciones no pueden satisfacerse simultáneamente.

Actividad propuesta

2. Representa la región factible de los siguientes sistemas de inecuaciones:

$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + 2y \geq 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \\ x - y > -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ 2x + y < 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ x + y > 1 \end{cases}$

Indica en cada caso si la solución es acotada, no acotada o no existe solución.

3. PROGRAMACIÓN LINEAL:

3.1. Definición

Se llama **programación lineal**, o también programa lineal, a la formulación algebraica que pretende **optimizar** (maximizar o minimizar) **una función lineal** de varias variables, sujeta a una serie de restricciones, también lineales.

La función lineal a optimizar se denomina **función objetivo**, y las restricciones se expresan mediante un sistema de inecuaciones lineales que debemos resolver.

La expresión general de un problema de programación lineal en dos dimensiones es, por tanto:

Función objetivo: $f(x, y) = a{\cdot}x + b{\cdot}y \longrightarrow$ Máximo o mínimo

$$\text{Restricciones: } \begin{cases} a_1x + b_1y \neq c_1 \\ a_2x + b_2y \neq c_2 \\ \quad\cdots \\ a_kx + b_ky \neq c_k \end{cases}$$

donde la desigualdad representada por $\neq$ puede ser de los cuatro tipos explicados antes (>, <, $\leq$ o $\geq$). Típicamente una de las restricciones es que los valores sean positivos, es decir: $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

La **solución factible** que hace óptima (máxima o mínima, según se desee) la función objetivo, se llama **solución óptima**, y siempre se encuentra en la frontera de la región factible.

3.2. Teorema fundamental de la programación lineal

En un programa lineal con dos variables, si existe una solución única que optimice la función objetivo, ésta se encuentra en un punto extremo (vértice) de la región factible acotada, nunca en el interior de dicha región.

De este teorema obtenemos dos consecuencias:

- Si la función objetivo toma el mismo valor óptimo en dos vértices, también toma idéntico valor en los puntos del segmento que determinan.
- En el caso de que la región factible no sea acotada, la función lineal objetivo no alcanza necesariamente un valor óptimo concreto, pero, si lo hace, éste se encuentra en uno de los vértices de la región.

Actividad resuelta

- *Una empresa aeronáutica construye dos tipos de aviones A y B. Para ello dispone de* 1800 *millones de euros, siendo el coste de cada avión* 30 *y* 20 *millones de euros, respectivamente. Además las condiciones de mercado exigen que el número total de aviones producidos no sea mayor de* 80.
  Sabiendo que el beneficio obtenido en la venta de un avión del tipo A es de 4 *millones de euros y en el tipo B,* 3 *millones de euros. ¿Cuántos aviones debe construir de cada clase para que el beneficio sea máximo?*

  Debemos **LEER** con cuidado el problema y traducirlo adecuadamente al lenguaje algebraico, tal y como se dijo en el capítulo anterior.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

La programación lineal pretende <u>optimizar una función</u>, en este caso es hacer <u>máximo</u> el beneficio, que depende de dos variables (las escribimos):

$$\text{Sean}\begin{cases} x = \text{número de aviones de tipo } A \\ y = \text{número de aviones de tipo } B \end{cases}$$

Para plantear la función a optimizar (la **función objetivo**), y las restricciones organizamos la información del problema:

	Nº aviones	**Coste**	**Beneficio**
Tipo A	x	**30**	**4**
Tipo B	y	**20**	**3**
Restricciones	No sea mayor de 80 $x + y \le 80$	Dispone de 1800 € $30x + 20y \le 1800$	**Función Objetivo** $z = 4x + 3y$

Falta un detalle a tener en cuenta, los valores deben ser positivos (no se puede tener un número negativo de aviones), es decir: $x \ge 0$ e $y \ge 0$, por tanto:

Función objetivo: $f(x, y) = 4x + 3y \longrightarrow$ Máximo (en millones de euros)

$$\text{Restricciones: } \begin{cases} r_1 : x + y \le 80 \\ r_2 : 30x + 20y \le 1800 \\ r_3 : x \ge 0 \\ r_4 : y \ge 0 \end{cases}$$

Siguiendo el procedimiento explicado en la sección (2) obtenemos la *región factible*:

Teniendo en cuenta el teorema anterior, se trata de encontrar los *vértices* de la región factible.

Para ello se resuelven todos los sistemas que se pueden formar con las **ecuaciones** de las restricciones, que nos van dando los distintos puntos de corte de las rectas:

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ 30x + 20y = 1800 \end{cases} \to (20, 60) \qquad \begin{cases} x + y = 80 \\ x = 0 \end{cases} \to (0, 80) \qquad \begin{cases} 30x + 20y = 1800 \\ y = 0 \end{cases} \to (60, 0)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to (0,0) \qquad \begin{cases} x + y = 80 \\ y = 0 \end{cases} \to (80, 0) \qquad \begin{cases} 30x + 20y = 1800 \\ x = 0 \end{cases} \to (0,90)$$

Los puntos $A\,(20,60)$, $B\,(0,80)$, $C\,(60,0)$, $D\,(0,0)$, $E\,(80,0)$ y $F\,(0,90)$ son los puntos de corte de las rectas que forman la región factible, pero no todos ellos tienen por que ser los vértices de la región factible.

Los vértices de la región factible cumplen todas las restricciones (y no sólo dos), por lo que tenemos que ver cuales de estos puntos cumplen todas las restricciones. Aunque podemos verlo en la representación gráfica, también podemos comprobar analíticamente cuáles forman la región factible sustituimos cada punto en las restricciones restantes:

- E no cumple la restricción $30x + 20y \le 1800$, ya que $30 \cdot 80 + 20 \cdot 0 = 2400 > 1800$ por lo que E no es un vértice de la región factible.
- F no cumple $x + y \le 80$, ya que $0 + 90 = 90 > 80$, por tanto F no es un vértice de la región factible.

Es decir, que la región factible tiene como vértices los puntos A, B, C y D, que son los que verifican todas las restricciones:

$\{r_1, r_2\}$	$\{r_1, r_4\}$	$\{r_2, r_3\}$	$\{r_3, r_4\}$
$A{:}(20,60)$	$B{:}(0,80)$	$C{:}(60,0)$	$D{:}(0,0)$

El último paso es ver cual de los vértices que forman la región factible hace máxima la función objetivo.

3.2.1. Método algebraico

El método algebraico consiste en **evaluar la función objetivo en cada uno de los vértices** (o sea, sustituir las coordenadas de los vértices de la región factible en la función objetivo) y comprobar cuál (o cuáles) de ellos proporciona el máximo o mínimo de la función objetivo.

En el ejemplo: $f(x, y) = 4x + 3y$. Sustituimos los valores de los cuatro vértices:

Punto	Función objetivo
$A{:}(20,60)$	$f(20, 60) = 4 \cdot 20 + 3 \cdot 60 = 260$
$B{:}(0,80)$	$f(0, 80) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 80 = 240$
$C{:}(60,0)$	$f(60,0) = 4 \cdot 60 + 3 \cdot 0 = 240$
$D{:}(0,0)$	$f(0,0) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$

La solución óptima corresponde al vértice para el que la función objetivo toma el valor máximo. En este caso es el vértice $A{:}(20,60)$:

Solución: Hay que construir 20 aviones del tipo A, 60 del tipo B y el beneficio es de 260 millones de euros.

Actividad propuesta

3. Con la misma región factible del ejemplo, optimiza las siguientes funciones objetivo:

a) $z = 2x + 4y \to$ Máx b) $z = 4x + 3y \to$ Mín c) $z = 4x + 3y \to$ Máx

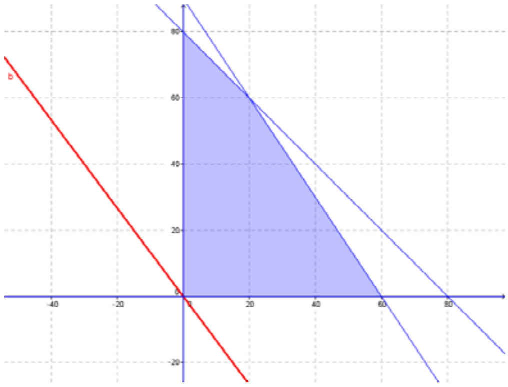
3.2.2. Método gráfico o de las rectas de nivel

En este método los vértices de la región factible se hallan gráficamente. Una vez hallada la región factible se representan las **rectas de nivel** asociadas a la función objetivo ($ax + by = k$) y se ve cuál es la que toma un valor k óptimo (en este caso máximo).

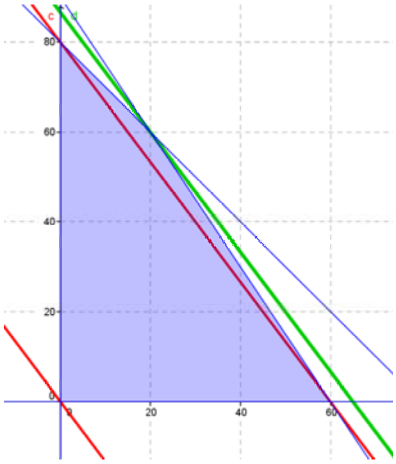
Para realizar este paso lo que se hace es dibujar una recta de nivel cualquiera y luego trazar paralelas a ella hasta encontrar el vértice de la región factible que haga óptima la función objetivo:

- Si se pretende buscar un máximo, el punto (o puntos) más a la derecha.
- Si se pretende buscar un mínimo, el punto (o puntos) más a la izquierda.

En el ejemplo la función objetivo es $z = 4x + 3y$. Las curvas de nivel son de la forma $4x + 3y = k$. Las representamos sobre la región factible empezando por la más fácil, la que pasa por el origen:



y trazamos paralelas a ella que pasen por cada vértice hasta encontrar la más *extrema*:



La solución óptima es la recta de color verde, que pasa por el vértice $A{:}(20, 60)$ y hace que:

$$z = 4x + 3y \Rightarrow z = 4 \cdot 20 + 3 \cdot 60 = 260$$

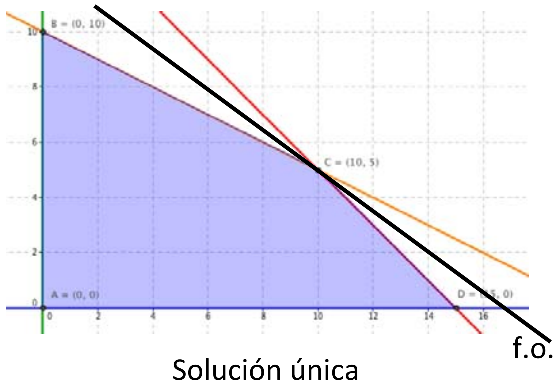
Hay que construir 20 aviones del tipo A, 60 del tipo B y el beneficio es de 260 millones de euros.

A lo largo de la explicación hemos ido viendo que es posible combinar ambos métodos para facilitar la obtención de la solución. Representar gráficamente la región factible ahorra tiempo al determinar los vértices, mientras que evaluar $f(x,y)$ es más preciso que el trazado de paralelas.

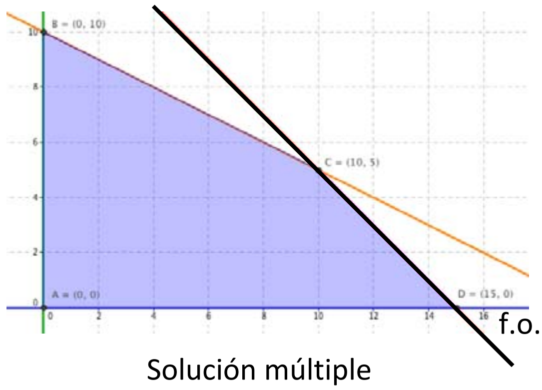
3.3. Tipos de soluciones en programación lineal

Vamos a considerar las distintas situaciones que se suelen presentar en los programas lineales para dos variables. Los programas lineales para dos variables pueden clasificarse, atendiendo al tipo de solución que presentan, en los casos siguientes:

- **Factibles con solución única**, cuando presentan un único óptimo.
- **Factibles con solución múltiple**, si presentan más de una solución óptima. En estos casos, las soluciones suelen ser todos los puntos de un segmento, es decir, los puntos comprendidos entre dos vértices de la región factible.

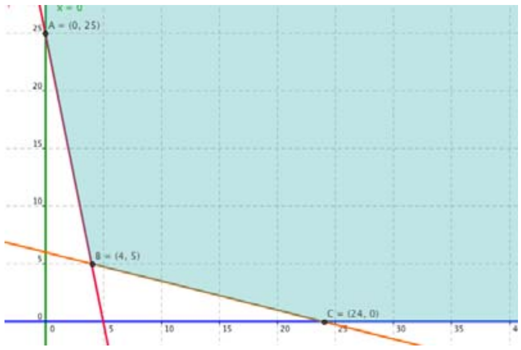


Solución única

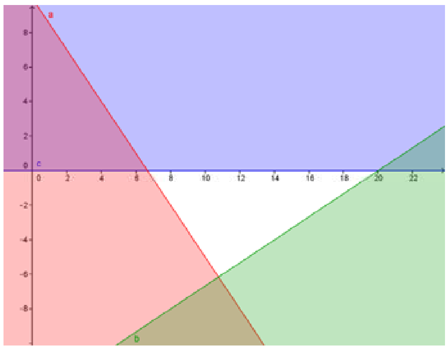


Solución múltiple

- **Factible no acotada**, cuando no existe límite para la función objetivo, es decir, la función objetivo puede hacerse tan grande como se desee en la región factible.
- **No factible**, si no existe el conjunto de soluciones. En estas situaciones, las desigualdades que describen las restricciones son inconsistentes.



Solución no acotada



No factible

Actividades propuestas

4. Resuelve los siguientes problemas de programación lineal:

$$\text{f.o. } f(x,y)=2x+3y \qquad \text{s.a.}\begin{cases} x+y\ge 2 \\ 2x+3y\le 6 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

$$\text{f.o. } f(x,y)=x+3y \qquad \text{s.a}\begin{cases} 2x+5y\le 300 \\ x+y\le 90 \\ x\ge 0 \\ y\ge 15 \end{cases}$$

$$\text{f.o. } z=x+y \qquad \text{s.a.}\begin{cases} 2x+3y\le 120 \\ x\ge y \\ 0\le x\le 45 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

$$\text{f.o. } z=1{,}5x+2y \qquad \text{s.a.}\begin{cases} 3x+4y\ge 12 \\ x\ge y \\ 0\le x\le 20 \\ 0\le y\le 10 \end{cases}$$

4. PROBLEMAS RESUELTOS

Típicamente se da un nombre genérico a los diferentes tipos de problemas de programación lineal, pero no suele ser necesario preocuparse de asociar cada problema a uno de esos tipos si entendemos bien el enunciado.

4.1. Problema de producción

Actividad resuelta

- *Una casa empacadora de alimentos recibe diariamente 700 kg de café tipo C y 800 kg de café tipo K. Hace con ellos dos mezclas. La de tipo A que consta de 2 partes de café de tipo C y una parte de café de tipo K y en la que gana 2,2 euros por kg; y la de tipo B con una parte de café tipo C y dos partes de café tipo K y en la que gana 2,6 euros por kg.*

  Halla la cantidad de mezcla que la casa empacadora debe hacer de cada tipo para que la ganancia sea máxima.

En este tipo de ejercicios es conveniente hacer un cuadro donde se vean todos los datos de que se disponen y que nos permiten escribir las restricciones y la función objetivo. Sean

$$\begin{cases} x = \text{kilos de mezcla A} \\ y = \text{kilos de mezcla B} \end{cases}$$

entonces:

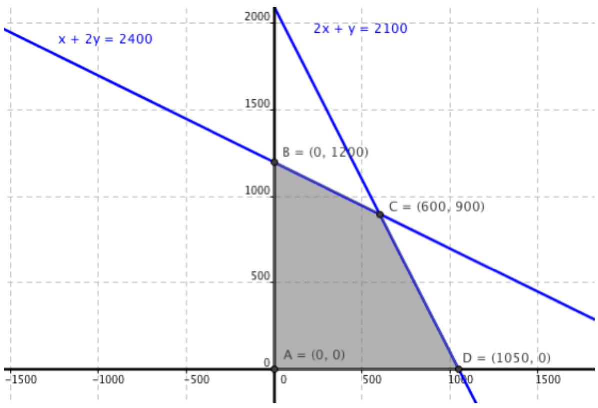
Factores \ Productos	A	B	Recursos
C	$\frac{2}{3}x$	$\frac{1}{3}y$	700
K	$\frac{1}{3}x$	$\frac{2}{3}y$	800
Productos	x	y	
Beneficios	$2{,}2\,x$	$2{,}6\,y$	

Las restricciones son:

$$\begin{aligned} &\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3}y \le 700 \to 2x + y \le 2100 \\ &\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y \le 800 \to x + 2y \le 2400 \\ &x \ge 0 \\ &y \ge 0 \end{aligned}$$

Queremos que el beneficio sea máximo, por tanto la función objetivo es: $z = 2{,}2x + 2{,}6y$ Máx.

Hallamos la región factible:



Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

Tenemos una región factible ACOTADA, y los vértices son los puntos:

$$A\,(0,0),\ B\,(1050,0),\ C\,(600,900),\ \mathrm{D}\,(0,1200).$$

El siguiente paso es ver que valores toma la función objetivo en cada uno de los vértices, para saber donde es óptima (máxima):

$A: z = 2{,}2\cdot 0 + 2{,}6\cdot 0 = 0$

$B: z = 2{,}2\cdot 1050 + 2{,}6\cdot 0 = 2310$

$C: z = 2{,}2\cdot 600 + 2{,}6\cdot 900 = \mathbf{3660}$ es el máximo

$D: z = 2{,}2\cdot 0 + 2{,}6\cdot 1200 = 3120$

Por tanto deben producirse 600 kg de la mezcla tipo A y 900 kg de la de tipo B para que el beneficio sea máximo e igual a 3660 euros.

4.2. Problemas de dietas

Son típicos los problemas de programación lineal en los que lo que se quiere es preparar una dieta (mezcla) que reúna una serie de condiciones a partir de unos productos determinados que se encuentran en el mercado. Se trata de saber que cantidades (x e y) debemos mezclar de dichos productos.

Actividad resuelta

- *Una ganadería desea proporcionar a su ganado una dieta que contenga un mínimo de 24 unidades del pienso A y un mínimo de 25 unidades del pienso B. En el mercado se comercializan dos tipos de compuestos C_1 y C_2, elaborados con ambos piensos. El paquete de C_1 contiene 1 unidad de A y 5 de B, siendo su precio de 1 euro, y el de C_2 contiene 4 unidades de A y 1 de B, siendo su precio 3 euros.*

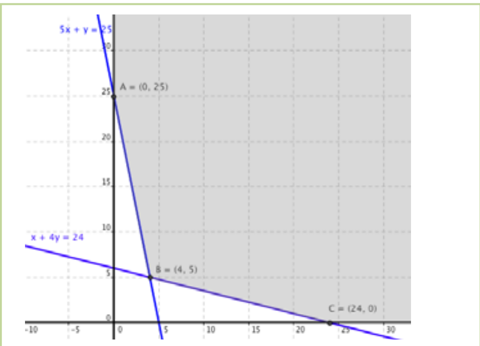
  ¿Qué cantidades de C_1 y C_2 deberá emplear la ganadería para preparar su dieta con el mínimo coste?

Mercado / Piensos	C_1	C_2	Unidades
A	1	4	24
B	5	1	25
Cantidad	x	y	
Coste	$1\cdot x$	$3\cdot y$	

Función Objetivo: $z = x + 3y$ debe ser mínima.

$$\text{Restricciones:}\begin{cases} x + 4y \ge 24 \\ 5x + y \ge 25 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Hallamos la región factible:



Se trata de una región factible no acotada.
Determinamos con exactitud los vértices:

$$A:\begin{cases} x = 0 \\ 5x + y = 25 \end{cases} \to A:(0{,}25)$$

$$B:\begin{cases} x + 4y = 24 \\ 5x + y = 25 \end{cases} \to B:(4{,}5)$$

$$C:\begin{cases} y = 0 \\ x + 4y = 24 \end{cases} \to C:(24{,}0)$$

Hallamos el valor que toma la función objetivo $z = x + 3y$ en cada uno de los vértices:

$$z_A = 0 + 3 \cdot 25 = 75 \qquad z_B = 4 + 3 \cdot 5 = 19 \qquad z_C = 24 + 3 \cdot 0 = 24$$

El óptimo, en este caso mínimo, se encuentra en el vértice B, por lo que se deben mezclar 4 paquetes de C_1 y 5 paquetes de C_2, con un coste de 19 euros.

4.3. Problemas de transporte

En estos casos se trata de resolver problemas de logística, es decir, transportar mercancías desde varios orígenes (ofertas o disponibilidades) hasta varios destinos (demandas o necesidades), con un coste mínimo, teniendo en cuenta las cantidades de que se dispone en los orígenes y las cantidades demandadas en los destinos, así como el coste de transporte entre cada origen y cada destino.

Actividad resuelta

- *Para abastecer de madera a tres aserraderos A_1, A_2 y A_3, hay dos bosques B_1 y B_2, que producen 26 y 30 toneladas respectivamente. Las necesidades de cada aserradero son 20, 22 y 14 toneladas respectivamente. Si los precios de coste de transporte por tonelada de los bosques a los aserraderos son en euros los que se indican en la tabla adjunta, proponer el transporte con el precio mínimo.*

	A_1	A_2	A_3
B_1	10	30	10
B_2	20	10	10

Tenemos dos orígenes que son los bosques B_1 y B_2 con sus ofertas (26 y 30 toneladas respectivamente) y tres destinos que son los aserraderos A_1, A_2 y A_3 con sus demandas.

Construimos un cuadro con todo ello:

Destinos / Orígenes	A_1	A_2	A_3	Ofertas
B_1	x	y	$26-(x+y)$	26
B_2	$20-x$	$22-y$	$14-[26-(x+y)]$	30
Demandas	20	22	14	
Costes	$10x+20(20-x)$	$30y+10(22-y)$	$10[26-(x+y)]+10(-12+x+y)$	z

La función objetivo viene dada por la suma de todos los costes y ha de ser mínima:

$$z = 10x + 20(20-x) + 30y + 10(22-y) + 10[26-(x+y)] + 10(-12+x+y) = -10x + 20y + 760$$

$$z = -10x + 20y + 760$$

Las restricciones son las que se deducen de tener en cuenta que todas las cantidades transportadas deben ser mayores o iguales a cero:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 26-(x+y) \geq 0 \rightarrow x+y \leq 26 \\ 20-x \geq 0 \rightarrow x \leq 20 \\ 22-y \geq 0 \rightarrow y \leq 22 \\ -12+x+y \geq 0 \rightarrow x+y \geq 12 \end{cases}$$

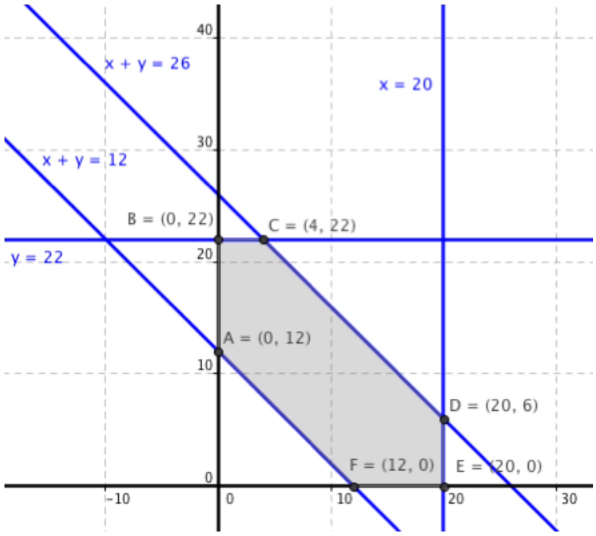
Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

Por tanto, el problema queda planteado como:

$$\text{f.o. } f(x,y) = -10\cdot x + 20\cdot y + 760 = \text{mín}$$

$$\text{s.a. } \begin{cases} x+y \le 26 \\ x+y \ge 12 \\ 0 \le x \le 20 \\ 0 \le y \le 22 \end{cases}$$

Construimos la región factible:



Determinamos exactamente los vértices:

$$A\,(12{,}0);\ B\,(20{,}0);\ C\,(20{,}6);\ D\,(4{,}22);\ E\,(0{,}22);\ F\,(0{,}12)$$

Hallamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices:

$z_A = -10\cdot 12 + 20\cdot 0 + 760 = 640$

$z_B = -10\cdot 20 + 20\cdot 0 + 760 = \mathbf{560}$

$z_C = -10\cdot 20 + 20\cdot 6 + 760 = 680$

$z_D = -10\cdot 4 + 20\cdot 22 + 760 = 1160$

$z_E = -10\cdot 0 + 20\cdot 22 + 760 = 1200$

$z_F = -10\cdot 0 + 20\cdot 12 + 760 = 1000$

Por tanto, desde el bosque B_1 se deben llevar 20 toneladas al aserradero A_1, ninguna al A_2 y 6 toneladas al A_3 y desde el bosque B_2 se transportarán 22 toneladas al aserradero A_2 y 8 al A_3.
El coste de transporte será de 560 euros.

Actividades propuestas

5. Dibuja el recinto que cumple las restricciones:

$$\begin{cases} x+2y \le 6 \\ 4x+3y \le 12 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

y analiza si los puntos $(0,2)$, $(3,0)$, $(1,1)$ y $(5,6)$ al conjunto de soluciones del sistema anterior.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

6. Dibuja el recinto que cumple las restricciones:

$$\begin{cases} x+3y\le 9 \\ x+y\ge 10 \\ x,y\ge 0 \end{cases}$$

y da seis puntos que sean solución del sistema anterior

7. Maximiza la función $f(x,y) = 3x + 2y$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} 2x+3y\le 15 \\ 2x+y\le 9 \\ x,y\ge 0 \end{cases}$$

y da seis puntos que sean solución del sistema anterior

8. Sea S la región del plano definida por

$$y\ge 2x-4 \qquad y\le x-1 \qquad 2y\ge x \qquad x\ge 0 \qquad y\ge 0$$

a) Representa la región S y calcula las coordenadas de sus vértices

b) Obtén los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = x - 3y$ en S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

9. Se consideran la función $f(x;y) = 5x - 2y$ y la región del plano S definida por el siguiente conjunto de restricciones:

$$x-2y\le 0 \qquad x+y\le 6 \qquad x\ge 0 \qquad y\le 3$$

a) Representa la región S.

b) Calcula las coordenadas de los vértices de la región S y obtén los valores máximo y mínimo de la función f en S indicando los puntos donde se alcanzan.

10. Minimiza $z = -3x - 2y$ sujeta a

$$-2x+y\le 2 \qquad x-2y\le 2 \qquad x\ge 0 \qquad y\le 3$$

a) Mediante la resolución gráfica del problema, discute si existen soluciones factibles y si existe solución óptima.

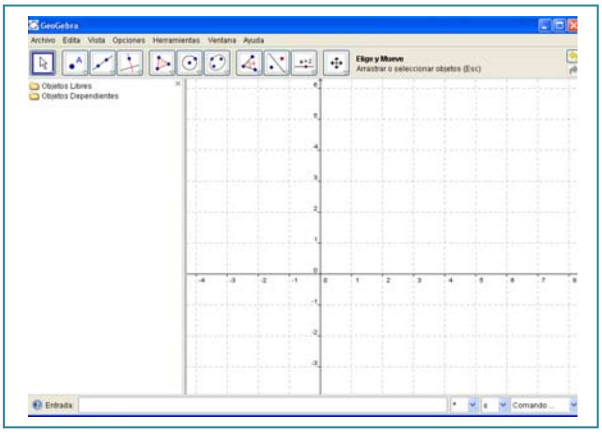
b) Si se añade la restricción: $x + y \ge 10$, discute si existe solución óptima y en caso afirmativo calcúlala.

11. Un astillero recibe un encargo para reparar barcos de la flota de un armador, compuesta por pesqueros de 500 toneladas y yates de 100 toneladas. Cada pesquero se tarda en reparar 100 horas y cada yate 50 horas. El astillero dispone de 1600 horas para hacer las reparaciones. Por política de empresa, el astillero no acepta encargos de más de 12 pesqueros ni más de 16 yates. Las reparaciones se pagan a 100 euros la tonelada, independientemente del tipo de barco. ¿Cuántos barcos de cada clase debe reparar el astillero para maximizar el ingreso con este encargo? ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

CURIOSIDADES. REVISTA

Geogebra

Utiliza Geogebra para resolver tus problemas de Programación Lineal



Geogebra es un software matemático libre. Trabaja con geometría, álgebra y cálculo. Permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, etc.

Al abrir el programa aparece una pantalla como la del margen con menús desarrollables, botones, una pantalla partida donde en la derecha están las ecuaciones y en la de la izquierda una cuadrícula, unos ejes y es donde aparecen las gráficas. En la parte inferior está: *Entrada*, donde escribimos las ecuaciones y las funciones.

Vamos a resolver el siguiente problema, que ya está resuelto en el capítulo:

- *Una casa empacadora de alimentos recibe diariamente 700 kg de café tipo C y 800 kg de café tipo K. Hace con ellos dos mezclas. La de tipo A que consta de 2 partes de café de tipo C y una parte de café de tipo K y en la que gana 2,2 euros por kg; y la de tipo B con una parte de café tipo C y dos partes de café tipo K y en la que gana 2,6 euros por kg. Halla la cantidad de mezcla que la casa empacadora debe hacer de cada tipo para que la ganancia sea máxima.*

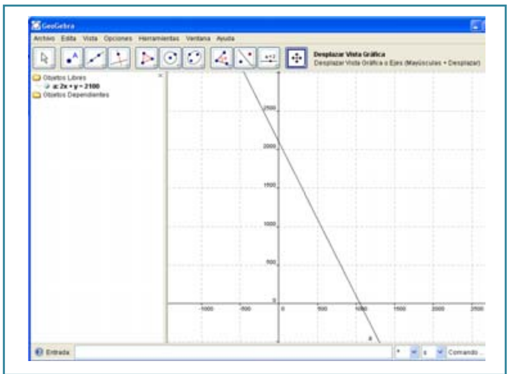
Las restricciones son:

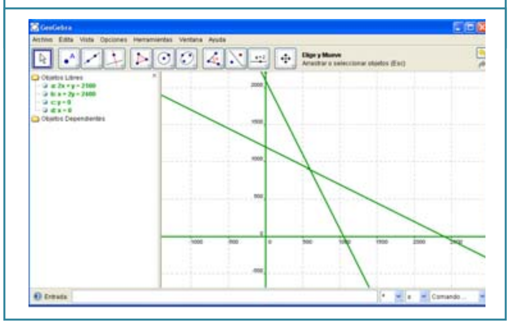
$$\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3}y \le 700 \to 2x + y \le 2100$$

$$\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y \le 800 \to x + 2y \le 2400$$

$$x \ge 0$$

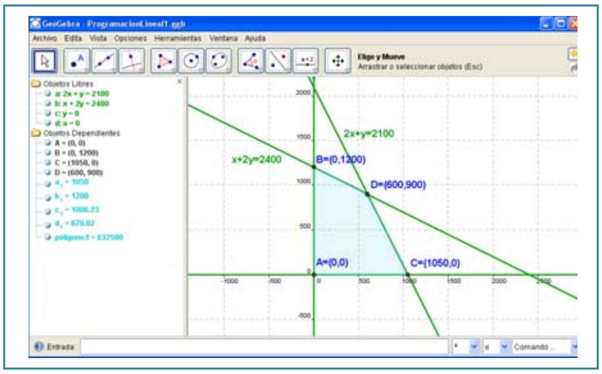
$$y \ge 0$$





Dibujamos la recta $2x + y = 2100$. Para ello escribimos en “*Entrada*” $2x+y=2100$. Pero no vemos nada todavía. En el botón de más a la derecha apretamos varias veces “*Zoom de acercamiento*” hasta que veamos la recta, pues, observa, que ahora cada cuadrícula está a 500 unidades.

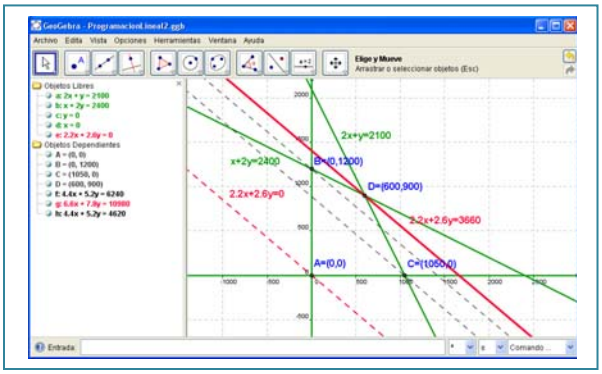
De igual modo dibujamos $x + 2y = 2400$, $x = 0$, e $y = 0$. Poniéndonos encima de la gráfica o de la ecuación y apretando el botón derecho del ratón, se plantean diversas opciones: renombrar, borrar…, propiedades. Entrando en *propiedades* tenemos de nuevo varias opciones: básico, color, estilo, álgebra y avanzado. Vamos a cambiar el *color* de las rectas a, por ejemplo, el color verde, y en *estilo* ponemos un trazo un poco más grueso. Si fueran restricciones estrictas podríamos elegir un *estilo* de recta de puntos.



Marcamos los vértices, simplemente marcando el segundo botón de "*nuevo punto*" y desplazándonos sobre la gráfica hasta las intersecciones de las rectas. De nuevo con "*Propiedades*" marcamos esos puntos a nuestro gusto y escribimos sus coordenadas, en este caso, en color azul.

Observa como en la pantalla de la izquierda tenemos como objetos independientes las ecuaciones de las rectas, y como objetos dependientes las coordenadas de los vértices.

Ya vemos claramente la región factible. La hemos coloreado en verde marcando el polígono, botón 5º, "*Polígono*" y con *propiedades*.



Queremos que el beneficio sea máximo, por tanto la función objetivo es:

$$z = 2{,}2x + 2{,}6y \ \text{Máx.}$$

Trazamos en rojo una recta paralela a la función objetivo que pase por el origen de coordenadas: $2{,}2x + 2{,}6y = 0$.

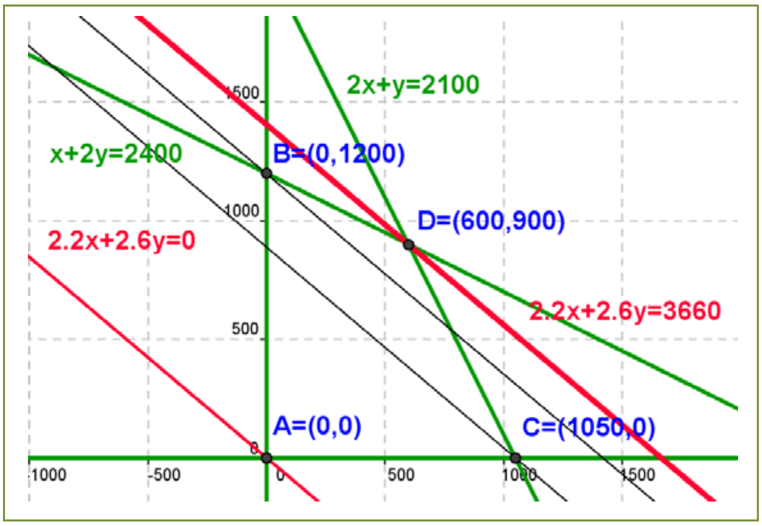
Utilizando el cuarto botón: "*recta paralela que pase por un punto*" hemos trazado las rectas paralelas a la función objetivo, en color negro y trazos de puntos, que pasan por cada uno de los vértices. La más alejada es la que hace máximo la función objetivo, en color rojo. Por tanto es la que pasa por el punto D. El siguiente paso es ver qué valores toma la función objetivo en cada uno de los vértices, para saber donde es óptima (máxima):

$A : z = 2{,}2 \cdot 0 + 2{,}6 \cdot 0 = 0$

$B : z = 2{,}2 \cdot 1050 + 2{,}6 \cdot 0 = 2310$

$D : z = 2{,}2 \cdot 600 + 2{,}6 \cdot 900 = \mathbf{3660}$ es el máximo

$C : z = 2{,}2 \cdot 0 + 2{,}6 \cdot 1200 = 3120$

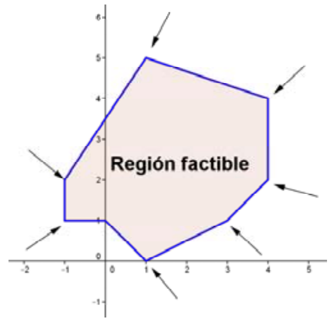
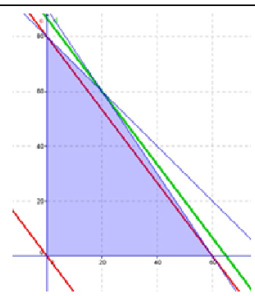


Por tanto deben producirse 600 kg de la mezcla tipo A y 900 kg de la de tipo B para que el beneficio sea máximo e igual a 3660 euros.

Ahora sólo nos queda hacer la representación gráfica del problema. Para ello, con el ratón en el primer botón marcamos en la pantalla de la derecha el trozo que queremos copiar, y desplegando el menú "*Edita*" escogemos "*Copia la vista gráfica en portapapeles*". Ahora ya la podemos copiar en nuestro documento.

- Intenta utilizar Geogebra para volver a resolver los problemas de las actividades realizadas.

RESUMEN

		Ejemplos
Sistemas de inecuaciones lineales	Un sistema de inecuaciones lineales es el conjunto de dos o más inecuaciones que deben cumplirse a la vez.	$\left\{\begin{array}{l} x+y\le 80 \\ 30x+20y\le 1800 \\ x,y\ge 0 \end{array}\right.$
Programación lineal	Se llama **programación lineal**, o también programa lineal, a la formulación algebraica que pretende optimizar (maximizar o minimizar) **una función lineal** de varias variables, sujeta a una serie de restricciones, también lineales. La función lineal a optimizar se denomina **función objetivo**, y las restricciones se expresan mediante un sistema de inecuaciones lineales que debemos resolver.	$\text{f.o.: } f(x,y)=a\cdot x+b\cdot y\rightarrow \text{Máx o mín}$ $s.a.:\left\{\begin{array}{l} a_1x+b_1y\ne c_1 \\ a_2x+b_2y\ne c_2 \\ \quad\dots \\ a_kx+b_ky\ne c_k \end{array}\right.$
Teorema fundamental	En un programa lineal con dos variables, si existe una solución única que optimice la función objetivo, ésta se encuentra en un punto extremo (vértice) de la región factible acotada, nunca en el interior de dicha región.	
Método algebraico de resolución	El método algebraico consiste en **evaluar la función objetivo en cada uno de los vértices** (o sea, sustituir las coordenadas de los vértices de la región factible en la función objetivo) y comprobar cuál (o cuáles) de ellos proporciona el máximo o mínimo de la función objetivo.	
Método gráfico de resolución	En este método los vértices de la región factible se hallan gráficamente. Sobre la región factible se representan las rectas de nivel asociadas a la función objetivo ($ax+by=k$) y se ve cuál es la que toma un valor k óptimo.	
Tipos de soluciones	- Factibles con solución única. - Factibles con solución múltiple, - Factible no acotada. - No factible.	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. - Encuentra el conjunto de soluciones de las inecuaciones siguientes:

a) $x+y-7\le 0$ b) $2x-y+3\ge 0$ c) $y\ge 3$ d) $x\le 5$ e) $x\ge 0$ f) $y\le 0$

2. - Dibuja las regiones factibles de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases}3x+4y\le 9\\ 2x-y\ge 12\end{cases}$ b) $\begin{cases}y+3x-7\le 0\\ y-6x+11\le 0\end{cases}$ c) $\begin{cases}x-2y\le 10 & x\ge 0\\ x+y\ge 10 & 0\le y\le 5\end{cases}$

3. - Maximizar la función $z=3x+3y$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases}x>0\\ y>0\\ x+y>0\\ x-y>0\end{cases}$$

4. - Calcula el valor máximo y el mínimo de la función $f(x,y)=x+2y$ sometida a las restricciones

$$y\le 4 \qquad x\le 3 \qquad x-y\le 3 \qquad x-y\ge 0$$

5. - Se quiere elaborar una dieta diaria para ganado que satisfaga unas condiciones mínimas de contenido vitamínico al día: 2 mg de vitamina A, 3 mg de vitamina B, 30 de la C y 2 de la D. Para ello se mezclan piensos de los tipos P y Q cuyo precio por kilogramo es para ambos de 30 céntimos, y cuyo contenido vitamínico por kilo se recoge en la tabla adjunta.

	A	B	C	D
P	1	1	20	2
Q	1	3	7,5	0

¿Cómo deben mezclarse los piensos para que el gasto sea mínimo? ¿Cuál es este gasto mínimo?

6. - Desde dos almacenes A y B se tiene que distribuir fruta a tres mercados de la ciudad. El almacén A dispone de 10 toneladas de fruta diaria y el B de 15 toneladas, que se reparten en su totalidad. Los dos primeros mercados necesitan diariamente 8 toneladas de fruta, mientras que el tercero necesita 9 toneladas diarias. El coste de transporte desde cada almacén a cada mercado viene dado, en euros por tonelada, en el cuadro adjunto.

	M_1	M_2	M_3
A	10	15	20
B	15	10	10

Planifica el transporte para que el coste sea mínimo.

7. - Una empresa construye en dos factorías, F1 y F2, tres tipos de barcos deportivos (A, B y C). La factoría F1 construye en un mes: 1 barco del tipo A, 5 del tipo B y 1 del tipo C, siendo su coste de mantenimiento mensual cuarenta mil euros. F2 construye en un mes: 1 barco del tipo A, 1 de tipo B y 2 de tipo C, siendo su coste mensual 20.000 euros. La empresa se ha comprometido a entregar anualmente a un club deportivo 3 barcos tipo A, 15 de tipo B y 12 de tipo C. ¿Cuántos meses deberá trabajar cada factoría, con objeto de que la empresa cumpla su compromiso con el mínimo coste?

8. - En un almacén se guarda aceite de girasol y de oliva. Para atender a los clientes se ha de tener almacenado un mínimo de 20 bidones de aceite de girasol y 40 de aceite de oliva y, además, el número de bidones de aceite de oliva no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol. La capacidad total del almacén es de 150 bidones. Sabiendo que el gasto de almacenaje de un bidón de aceite de oliva es de 1 euro, y el de un bidón de aceite de girasol es de 0,5 euros, ¿cuántos bidones de cada tipo habrá que almacenar para que el gasto sea mínimo? ¿Y para que el gasto sea máximo?

9. - Una empresa elabora dos productos, cada uno de ellos en una cantidad que es múltiplo de 1000. Conoce que la demanda de ambos productos conjuntamente es mayor que 3000 unidades y menor que 6000 unidades. Asimismo, sabe que la cantidad que se demanda de un producto es mayor que la mitad y menor que el doble de la del otro. Si la empresa desea vender toda la producción:

a) ¿De cuántos modos puede organizar la producción?

b) Para obtener los máximos beneficios, ¿cuánto ha de ser la producción de cada uno de los productos si uno se vende a un precio que es triple que el del otro?

10. - Una empresa dedicada a la fabricación de piezas de automóvil tiene dos factorías que producen, respectivamente, 8000 y 15000 piezas mensuales. Estas piezas han de ser transportadas a tres fábricas que necesitan 10000, 7000 y 6000 piezas respectivamente.

	Fáb. 1	Fáb. 2	Fáb. 3
Fact. 1	6	13	2
Fact. 2	4	4	12

Los costes de transporte, en céntimos de euro, por pieza son los que aparecen en el cuadro adjunto. ¿Cómo debe organizarse el transporte para que el coste sea mínimo?

11. - Una persona va a iniciar una dieta y recibe las siguientes recomendaciones:

- Debe tomar una mezcla de dos compuestos D_1 y D_2

- La cantidad total diaria que puede ingerir, una vez mezclados los compuestos, no debe ser superior a 150 gramos ni inferior a 50 gramos.

- En la mezcla debe haber más cantidad de D_1 que de D_2

- La mezcla no debe contener más de 100 gramos de D_1

Se sabe que cada gramo de D_1 aporta 0,3 mg de vitaminas y 4,5 calorías y cada gramo de D_2 aporta 0,2 mg de vitaminas y 1,5 calorías. ¿Cuántos gramos de cada compuesto debe tomar para obtener la máxima cantidad de vitaminas? ¿Cuántos gramos de cada compuesto debe tomar si desea el mínimo posible de calorías?

12. - Una promotora pretende diseñar una urbanización con a lo sumo 15 edificaciones entre chalets y bloques de pisos. Los bloques de pisos no deberían ser más de un 40% de las edificaciones que se construyan. La urbanización tendría como mucho 12 chalets y como poco 2 bloques de pisos.

a) ¿Qué combinaciones de cada tipo de viviendas son posibles? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Qué combinación hace mayor la diferencia entre el número de chalets y de bloques de pisos?

13. - Para dotar mobiliario a cierta zona de una ciudad, se quiere colocar al menos 20 piezas entre farolas y jardineras. Hay 40 farolas y 12 jardineras disponibles. Se pretende que el número de jardineras colocadas no sea superior a una tercera parte del de farolas colocadas, pero de forma que por lo menos un 20% de las piezas que se coloquen sean jardineras.

a) ¿Qué combinaciones de piezas de cada tipo se pueden colocar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Qué combinación hace que la diferencia entre el número de farolas y de jardineras colocadas sea mayor? ¿Es la combinación donde más piezas de mobiliario se colocan?

14. - Un restaurante quiere adecuar, en parte o en su totalidad, una superficie de 1100 m^2 para aparcamiento y área recreativa infantil. La superficie de área recreativa ha de ser de al menos 150 m^2. El aparcamiento ha de tener como poco 300 m^2 más que el área recreativa, y como mucho 700 m^2 más que la misma. El aparcamiento le cuesta 15 euros por m^2, y el área recreativa 45 euros por m^2.

a) ¿Qué combinaciones de superficie dedicados a cada tipo de servicio se pueden adecuar? Plantea el problema y representa gráficamente las soluciones.

b) ¿Cuál es la combinación más cara? ¿Coincide con la que dedica más espacio al aparcamiento?

15. - Una empresa está seleccionando empleados con contrato eventual por un año y con contrato fijo. El sueldo anual (en miles de euros) de cada empleado eventual es 8 y de cada empleado fijo es 15. La empresa tiene un tope de 480 (miles de euros) para pagar los sueldos anuales de los empleados que contrate. Los empleados fijos han de ser por lo menos 10, y no más de 24. Además el número de eventuales no puede superar en más de 14 al de fijos.

a) ¿Qué combinaciones de empleados fijos y eventuales se puede contratar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría contratar 24 fijos y ningún eventual?

b) Si el objetivo es contratar el mayor número total de empleados ¿cuántos ha de contratar de cada tipo? ¿Y si el objetivo es contratar el mayor número de eventuales?

16. - Una empresa de autobuses dispone de un vehículo para cubrir dos líneas (A y B) que puede trabajar en ellas, a lo sumo, 300 horas mensualmente.

Un servicio en la línea A lleva 2 horas, mientras que en la B supone 5 horas. Por otra parte, en la línea B se deben cubrir al menos 15 servicios mensualmente y, además, el autobús no puede prestar globalmente más de 90 servicios cada mes entre ambas líneas.

a) ¿Cuántos servicios puede prestar el vehículo al mes en cada una de las líneas? Plantear el problema y representar gráficamente su conjunto de soluciones.

b) Sabiendo que la empresa obtiene un beneficio con cada servicio prestado de 60 euros y 180 euros en las líneas A y B respectivamente, ¿cuántos servicios le convendrá realizar en cada una para maximizar el beneficio total? ¿Cuál será su importe?

17. - En una fábrica de cajas de cartón para embalaje y regalo se fabrican dos tipos de cajas: la caja A que requiere para su construcción 4 m de papel decorado y 0,25 m de rollo de cartón, que se vende a 8 euros, y la caja B que requiere 2 m de papel decorado y 0,5 m de rollo de cartón y que se vende a 12 euros. En el almacén disponen únicamente de 440 m de papel de regalo y de 65 m de rollo de cartón. Si suponemos que se vende toda la producción de cajas, ¿cuántas de cada tipo deberán de fabricarse para que el importe de las ventas sea máximo? ¿A cuánto ascenderá?

18. - Un fabricante de coches lanza una oferta especial en dos de sus modelos, ofreciendo el modelo A a un precio de 9000 euros y el modelo B a 12000 euros. La oferta está limitada por las existencias, que son 20 coches del modelo A y 10 coches del modelo B, queriendo vender al menos tantas unidades del modelo A como del modelo B. Por otra parte, para cubrir los gastos de esta campaña, los ingresos obtenidos con ella deben ser, al menos, de 36000 euros.

a) ¿Cuántas unidades de cada modelo se podrán vender? Plantea el problema y representa gráficamente su conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántos coches deberá vender de cada modelo para maximizar sus ingresos? ¿Cuál es su importe?

AUTOEVALUACIÓN

1.- Indica cuál de las inecuaciones siguientes es estricta:

a) $5x+2y<7$ b) $5x+2y\le 7$ c) $5x+2y=7$ d) $5x+2y\ge 7$

2.- Indica cuál de las regiones factibles de los sistemas siguientes es acotado:

a) $\begin{cases} x+y\ge 5 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y\le 5 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y\le -5 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y>8 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$

3.- Indica cuál de las regiones factibles de los sistemas siguientes no posee solución:

a) $\begin{cases} x+y\ge 5 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y\le 5 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y\le -5 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y>8 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$

4.- Indica cuál de las afirmaciones siguientes es cierta:

a) La solución de un programa lineal está siempre en un vértice

b) La solución óptima de un programa lineal siempre se encuentra en la frontera de la región factible.

c) La región factible determina la función objetivo.

d) En un programa lineal se optimiza la región factible.

Una nueva granja estudia cuántos patos y gansos puede albergar. Cada pato consume 3 kg de pienso por semana y cada ganso 4 kg de pienso por semana. El presupuesto destinado a pienso permite comprar 700 kg semanales. Además, quieren que el número de patos sea mayor que el de gansos. Denomina x al número de patos e y al de gansos. ¿Cuál es el máximo número de animales que podría albergar la granja?

5.- Para este problema la función objetivo es:

a) $3x+4y \rightarrow$Mín b) $x+y \rightarrow$Máx c) $x+y \rightarrow$Mín d) $3x+4y \rightarrow$Máx

6.- Para este problema las restricciones son:

a) $\begin{cases} 3x+4y\le 700 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+4y\ge 700 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x+3y\ge 700 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+4y\le 700 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ x>y \end{cases}$

7.- Resuelve el problema e indica si la solución es:

a) No tiene solución. b) 100 patos y 100 gansos. c) 233 patos y ningún ganso. d) Ningún ganso y 175 patos.

Apéndice: Problemas de Programación lineal en las P.A.A.U.

(1) Una empresa fabrica únicamente tapas y envases. Cada lote de tapas requiere de 1 litro de barniz y 5 minutos en el horno, mientras que cada lote de envases requiere de 2 litros de barniz y 3 minutos en el horno. Semanalmente se dispone de 1000 litros de barniz y 3000 minutos en el horno. Por restricciones de su infraestructura, la producción semanal entre los dos productos es, como mucho, de 650 lotes.

a) ¿Cuántos lotes de cada tipo puede fabricar la empresa cada semana? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se cumplirían los requisitos si la empresa fabricase 200 lotes de tapas y 100 lotes de envases?

b) Si la empresa vende todo lo que fabrica y gana por cada lote de tapas fabricado 3000 euros y por cada lote de envases 4000 euros, ¿cuántos lotes de cada tipo deberá fabricar para maximizar sus ganancias?

(2) Un empresario dispone un determinado día de 3600 euros para fabricar ratones y teclados. Cada ratón le cuesta 30 euros y lo vende a 34 euros. En cuanto a los teclados, cada uno tiene asociado un coste de fabricación de 40 euros y un precio de venta de 45 euros. Por restricciones de la empresa, no se pueden fabricar más de 95 aparatos en total en un día.

a) ¿Cuántos ratones y cuántos teclados puede fabricar en un día? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría fabricar en un día 15 ratones y 20 teclados?

b) Teniendo en cuenta que el beneficio es la diferencia entre el precio de venta y el coste y que la empresa vende todo lo que fabrica, ¿cuántos aparatos de cada tipo debe fabricar en un día para que el beneficio sea máximo?

(3) Una empresa fabrica dos tipos de piezas: *A* y *B*. Cada día debe fabricar al menos 6 piezas, disponiendo para ello de 160 horas de mano de obra. La fabricación de cada pieza tipo *A* necesita 8 horas de mano de obra y la de tipo *B* necesita 16 horas de mano de obra. Existe además la restricción de que no puede fabricar más de 4 piezas de tipo *A*.

a) ¿Cuántas piezas de cada tipo puede fabricar en un día? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si vende todo lo que fabrica y por cada pieza tipo *A* obtiene un beneficio de 120 euros y por cada pieza tipo *B* obtiene un beneficio de 100 euros, ¿cuántas piezas de cada tipo debe fabricar cada día para maximizar su beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

(4) Una carpintería elabora dos tipos de muebles, A y B. Cada mueble de tipo *A* requiere 6 días de trabajo para su elaboración, mientras que cada mueble de tipo *B* requiere 3 días. Por la estructura organizativa de dicha empresa, cada mes, que consta de 30 días laborables, se puede elaborar, a lo sumo, 4 muebles de tipo *A* y 8 de tipo *B*.

a) ¿Cuántos muebles de cada tipo pueden fabricar en un mes para cumplir con todos los requerimientos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si venden todo lo que fabrican y el beneficio proporcionado por cada mueble tipo *A* vendido es de 500 euros y por cada mueble de tipo *B* es de 200 euros, ¿cuántos muebles de cada tipo deberían fabricar para maximizar el beneficio? ¿Cuántos tendrían que fabricar para maximizar el número de muebles elaborados?

(5) Una fábrica de cerveza produce cerveza negra y rubia. Para la elaboración de un bidón de cerveza negra son necesarios 2 kg de lúpulo, 4 kg de malta y una hora de trabajo. Para la elaboración de un bidón de cerveza rubia son necesarios 3 kg de lúpulo, 2 kg de malta y una hora de trabajo. Cada día se dispone de 60 kg de lúpulo, 80 kg de malta y 22 horas de trabajo. El beneficio obtenido es de 60 euros por cada bidón de cerveza negra vendido y de 40 euros por cada bidón de cerveza rubia.

a) ¿Cuántos bidones de cerveza de cada tipo pueden producir al día para cumplir con todos los requerimientos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Es posible que en un día cualquiera se hayan producido 15 bidones de cerveza negra y 20 de cerveza rubia?

b) Si vende todo lo que produce, ¿cuántos bidones de cerveza de cada tipo deberían producir para maximizar el beneficio?

(6) Una vagoneta de una empresa está destinada a transportar paquetes de tipo *A* y *B* y soporta como mucho 1000 kg de peso. Se sabe además que cada paquete de tipo *A* pesa 20 kg y cada uno de tipo *B* pesa 25 kg. Por exigencias de la producción, en cada viaje debe transportar al menos 15 paquetes de tipo *A* y al menos 20 paquetes de tipo *B*.

a) ¿Cuántos paquetes de cada tipo se pueden transportar en un viaje? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría transportar en un viaje 17 paquetes de tipo *A* y al menos 20 paquetes de tipo *B*?

b) ¿Cuántos paquetes de cada tipo debería transportar en un viaje para maximizar el número total de paquetes transportados?

(7) Una nueva granja estudia cuántas gallinas y ocas puede albergar. Cada gallina consume 1 kg de pienso por semana y cada oca 5 kg de pienso por semana. El presupuesto destinado a pienso permite comprar 200 kg semanales. Además, quieren que el número de gallinas sea menor o igual que cinco veces el número de ocas.

a) ¿Cuántas gallinas y ocas podrá tener la granja? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se cumplirían los requisitos si albergase 40 gallinas y 20 ocas?

b) Según estos requisitos, ¿cuál es el máximo número de animales que podría albergar la granja?

(8) Una fábrica está especializada en dos juguetes: bicicletas y patinetes. Al mes puede fabricar un máximo de 480 bicicletas y 600 patinetes. Para la elaboración de cada bicicleta son necesarias 2 horas de trabajo y para la elaboración de cada patinete es necesaria una hora de trabajo. Se dispone de un máximo de 1000 horas de trabajo al mes.

a) ¿Cuántas bicicletas y patinetes puede fabricar en un mes para cumplir con todos los requerimientos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántas bicicletas y patinetes deberían fabricar para maximizar el número total de juguetes (bicicletas más patinetes) fabricados? ¿Cuántos juguetes fabrica en ese caso?

(9) Una costurera dispone de 36 metros de tela para hacer faldas y pantalones. Necesita 1 metro de tela para hacer una falda y 2 metros de tela para hacer un pantalón. Por exigencias del cliente, tiene que hacer al menos la misma cantidad de faldas que de pantalones y al menos 4 pantalones.

a) ¿Cuántas unidades puede hacer de cada prenda? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si le cuesta 3 euros cada falda terminada y 9 euros cada pantalón, ¿cuántas unidades debe producir de cada tipo para minimizar los costes? ¿cuánto sería en ese caso el coste total?

(10) Una compañía minera extrae dos tipos de carbón, hulla y antracita, de forma que todo el carbón extraído es vendido. Por exigencias gubernamentales, debe extraer diariamente al menos el triple de camiones de hulla que de antracita. Además, por la infraestructura de la compañía, como mucho se pueden extraer 80 camiones de carbón en un día y al menos 10 de ellos deben ser de antracita.

a) ¿Cuántos camiones de cada tipo de carbón se pueden extraer en un día? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría extraer en un día 20 camiones de hulla y 15 de antracita?

b) Si la ganancia por cada camión de hulla es de 4000 € y por cada camión de antracita es de 6000 €, ¿cuántos camiones de cada tipo debería extraer en un día para maximizar sus ganancias?

(11) En cierta quesería producen dos tipos de queso: mezcla y tradicional. Para producir un queso mezcla son necesarios 25 cl de leche de vaca y otros 25 cl de leche de cabra; para producir uno tradicional, sólo hacen falta 50 cl de leche de vaca. La quesería dispone de 3600 cl de leche de vaca y 500 cl de leche de cabra al día. Por otra parte, puesto que los quesos tradicionales gustan más, cada día produce al menos tantos quesos de tipo tradicional como de mezcla.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo podrá producir en un día cualquiera? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si la quesería vende todo lo que produce y obtiene un beneficio de 3 euros por cada queso de tipo mezcla y de 4 euros por cada queso de tipo tradicional, ¿cuántas unidades de cada tipo debe producir diariamente para maximizar beneficios? ¿Qué beneficio obtiene en ese caso?

(12) Para que una encuesta sobre política de inmigración sea fiable, se exige que haya al menos 2300 personas entrevistadas, entre españoles y extranjeros, de las cuales como mucho 1000 serán extranjeros y también se exige que los extranjeros sean por lo menos un 10% del total de personas entrevistadas.

a) ¿Cuántos españoles y cuántos extranjeros pueden ser entrevistados? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si el coste estimado de cada entrevista es de 6 euros, ¿cuál sería el máximo coste que podría tener la encuesta? ¿a cuántos españoles se habría entrevistado en dicho caso?

(13) Un tenista planea su entrenamiento para la próxima temporada. Dispone de 48 horas semanales en las que puede entrenar y debe repartir ese tiempo entre la preparación física y mejorar su técnica. El entrenador le obliga a dedicar al menos 5 horas semanales a la parte física y al menos 30 horas en total, entre preparación física y técnica. Por otra parte, él quiere dedicar al menos el doble de tiempo a la parte técnica que a la preparación física.

a) ¿Cuántas horas puede dedicar a cada tipo de entrenamiento? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si la hora de preparación física le cuesta 50 euros y la de mejora de la técnica 80 euros, ¿cuántas horas debe dedicar a cada tipo de entrenamiento para minimizar el coste? ¿a cuánto ascendería dicho coste?

(14) Para cubrir las nuevas necesidades de un centro hospitalario en los servicios de corta estancia y planta se quiere asignar un máximo de 24 auxiliares de enfermería. En corta estancia debería haber al menos 4. Como poco, tiene que haber 8 auxiliares más en planta que en corta estancia.

a) ¿Qué combinaciones de auxiliares para cada tipo de servicio se pueden asignar? Plantea el problema y representa gráficamente las soluciones.

b) ¿Cuál es la combinación con menos personal? ¿Cuál asigna más auxiliares en corta estancia?

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

(15) Una empresa de alta confitería elabora tartas y bizcochos especiales, disponiendo de 80 horas cada día para la elaboración de dichos productos. Cada tarta requiere 1 hora para su elaboración y cada bizcocho 2 horas. Además debe abastecer a un restaurante que compra todos los días 20 tartas y 10 bizcochos.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo podrá elaborar en un día para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente las soluciones.

b) Si cada tarta le cuesta a la empresa 15 € y cada bizcocho le cuesta 12 €, ¿cuántos productos de cada tipo debe elaborar en un día para minimizar el coste total? ¿Y para maximizar el número de productos elaborados?

(16) *Fabada Móvil* sólo comercializa dos platos: fabada tradicional y *light*. Cada ración de fabada tradicional lleva 100 g de fabes y 100 g de *compangu*, mientras que cada ración de fabada *light* lleva 110 g de fabes y 50 g de *compangu*. Cada día *Fabada Móvil* dispone de 11000 g de fabes y de 6200 g de *compangu*. Tiene un cliente fijo que compra cada día 4 raciones de fabada *light* y que *Fabada Móvil* se ha comprometido a abastecer.

a) ¿Cuántas raciones de cada tipo puede preparar *Fabada Móvil* en un día para cumplir con todos los requerimientos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántas raciones de cada tipo debería preparar para maximizar el número total de raciones de fabada que puede poner a la venta? ¿Cuántas tendría que preparar para maximizar el número de raciones de fabada tradicional que puede poner a la venta?

(17) El aforo máximo de un circo es de 300 personas. Se exige que cada niño vaya acompañado al menos de un adulto. Por otro lado, una subvención recibida obliga a que el número de adultos entre el público sea como mucho el doble que el de niños. El circo gana 30 € por adulto y 15 € por niño.

a) ¿Cuántas entradas de adulto y cuántas de niño se podrán vender en total para la próxima sesión? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántas entradas de cada tipo debe vender el circo para maximizar sus ganancias? ¿Y para maximizar el número de niños entre el público?

(18) Una mueblería fabrica mesas y sillas. La fabricación de una mesa requiere de 1 hora de corte, 4 horas de ensamble y 3 horas de acabado, generando un beneficio de 100 €. La fabricación de una silla requiere de 2 horas de corte, 4 h de ensamble y 1 h de acabado, generando un beneficio de 50 €. Cada día se dispone de un máximo de 14 horas de corte, 32 h de ensamble y 18 h de acabado.

a) ¿Cuántos artículos de cada tipo puede fabricar cada día esta mueblería? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si vende cuanto produce, ¿cuántos artículos de cada tipo debe fabricar diariamente para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

(19) Una empresa especializada organiza un cumpleaños para 10 niños, en el que se van a servir helados y flanes. Puesto que todos los niños quieren tener postre, el número de helados más el de flanes tiene que ser al menos igual al número de niños en el cumpleaños. El cliente ha exigido que haya al menos 2 helados más que flanes. La empresa dispone como mucho de 14 helados.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo puede servir la empresa para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente las soluciones.

b) Si la empresa cobra al cliente por cada helado 3 euros y por cada flan 2 euros, ¿cuántas unidades de cada tipo deberá servir para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascenderán dichos ingresos?

(20) En una determinada empresa, se elige energía eólica o energía eléctrica al principio de cada día para el funcionamiento de una máquina que fabrica coches y motos de juguete. Los días que está con eólica la máquina fabrica 20 coches y 10 motos. Los días que está con eléctrica fabrica 40 coches y 90 motos. La empresa recibe el pedido de un cliente que desea al menos 360 coches y al menos 600 motos y que tiene que ser abastecido como mucho en 20 días.

a) ¿Cuántos días deberá utilizar cada tipo de energía para abastecer a dicho cliente cumpliendo los plazos establecidos? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si a la empresa le cuesta 1000 euros cada día que utiliza la energía eólica y 2500 euros cada día que utiliza la eléctrica, ¿cuántos días debe utilizar cada una para minimizar sus gastos? ¿Y para abastecer al cliente lo antes posible?

(21) Una ONG va a realizar un envío compuesto de lotes de alimentos y de medicamentos. Como mínimo ha de mandar 4 lotes de medicamentos, pero por problemas de caducidad no pueden mandarse más de 8 lotes de estos medicamentos. Para realizar el transporte se emplean 4 contenedores para cada lote de alimentos y 2 para cada lote de medicamentos. El servicio de transporte exige que al menos se envíe un total de 24 contenedores, pero que no se superen los 32.

a) ¿Qué combinaciones de lotes de cada tipo pueden enviarse? Plantea el problema y representa gráficamente las soluciones. ¿Pueden enviarse 4 lotes de alimentos y 5 de medicamentos?

b) Si la ONG quiere maximizar el número de lotes enviados, ¿qué combinación debe elegir?

(22) Una empresa de excavaciones y movimientos de tierra va a realizar un pedido de gasóleo A para sus vehículos de transporte (a un precio de 0,90 euros el litro) y B para la maquinaria (a 0,70 euros el litro). Como poco, se necesitan 1000 litros de gasóleo A, y como mucho 3600 de gasóleo B. En total, entre ambos tipos de gasóleo, no debe pedir más de 5000 litros. Además, se quiere pedir por lo menos 1000 litros más de gasóleo B que de gasóleo A.

a) ¿Cuántos litros de cada tipo de gasóleo se pueden pedir? Plantea el problema y representa gráficamente las soluciones.

b) ¿Cuál es la composición del pedido más barato? ¿Y la del más caro?

(23) En la remodelación de un centro de enseñanza se quiere habilitar un mínimo de 8 nuevas aulas, entre pequeñas (con capacidad para 50 alumnos) y grandes (con capacidad para 120). Como mucho, un 25 % de aulas podrán ser grandes. Además, el centro necesita que se habilite al menos 1 aula grande, y no más de 15 pequeñas.

a) ¿Qué combinaciones de aulas de cada tipo se pueden habilitar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Cuál es el conjunto mínimo de aulas pequeñas que se pueden habilitar? Si se quiere que la capacidad total conseguida con las aulas habilitadas sea lo mayor posible ¿cuántas tendría que hacer de cada tipo? ¿Cuántos alumnos cabrían en total?

(24) En una empresa se está discutiendo la composición de un comité para negociar los sueldos con la dirección. En el comité habrá sindicalistas e independientes. El número total de miembros no deberá ser inferior a 10 ni superior a 20. Al menos un 40 % del comité serán sindicalistas. El número de independientes será como poco una cuarta parte del de sindicalistas.

a) ¿Qué combinaciones de miembros de cada tipo puede tener el comité? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Puede haber 4 sindicalistas y 16 independientes?

b) Si se quiere que el número de independientes sea máximo, ¿cuál será la composición del comité?