MATEMÁTICAS I
1º Bachillerato
Capítulo 1: Números reales y complejos

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Jorge Muñoz y Paco Moya

Revisora: Rosa María Herrera

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

La variable compleja permite resolver problemas muy diferentes dentro de áreas tan variadas como pueden ser hidráulica, aerodinámica, electricidad, electromagnetismo, y otros. Algunos de ellos solo requieren el conocimiento de los números complejos, como sucede en el caso del cálculo de los autovalores asociados a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Otros en cambio requieren la utilización de la teoría de funciones analíticas complejas, como los problemas de contorno que aparecen, por ejemplo, en el estudio del flujo de fluidos, la conducción del calor, la elasticidad o el potencial electrostático. ¿Sabías que la forma del ala de los aviones se diseña mediante operaciones con números complejos? Se puede decir que el ser humano es capaz de volar gracias a ellos.

Muchos problemas geométricos pueden resolverse utilizando las transformaciones complejas. Para resolver muchos de estos problemas basta conocer lo que vas a estudiar en este capítulo, pero para otros (transformaciones, funciones analíticas) habrá que esperar a saber más.

Si nos quedamos solo dentro de las Matemáticas, es interesante estudiar la variable compleja por estar estrechamente relacionada con distintas áreas, de manera que su estudio pueda hacer accesible parte del álgebra, de la trigonometría o proporcione herramientas para el cálculo integral.

Los antiguos algebristas operaron con expresiones en las que aparecía $\sqrt{-\mathbf{1}}$. Leibniz, en el siglo XVII, todavía decía que $\sqrt{-\mathbf{1}}$ era "*una especie de anfibio entre el ser y la nada*". En 1777 Euler le dio al "*monstruo*" $\sqrt{-\mathbf{1}}$ el nombre de i (por *imaginario*). Pero atención, que no te equivoque el nombre, imaginario no significa ilusorio, inexistente o algo así. En la actualidad esta notación se usa casi universalmente, excepto en ingeniería eléctrica, donde se utiliza *j* en lugar de i, ya que la letra i se usa para indicar la intensidad de la corriente.

Cuando se desarrolló la teoría de los números complejos, la electricidad era una materia de interés solo de laboratorio. Pero antes del final del siglo XIX los descubrimientos sobre electricidad y electromagnetismo transformaron el mundo, y en este proceso los números complejos fueron una herramienta que simplificó el cálculo con las corrientes alternas. Esto prueba que conocimientos que son matemática pura para una generación se convierten en aplicados para la siguiente.

Autor: Jorge Muñoz y Paco Moya
Revisora: Rosa María Herrera
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. NÚMEROS REALES

1.1. Números racionales e irracionales

Recuerda que:

Ya conoces los distintos tipos de conjuntos numéricos:

Naturales ➔ $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Enteros ➔ $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Racionales ➔ $\mathbf{Q} = \left\{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\right\}$.

Los números racionales también contienen a los números que tienen expresión decimal exacta (0,12345) y a los que tienen expresión decimal periódica (7,01252525…). Si el denominador (de la fracción irreducible) solo tiene como factores primos potencias de 2 o 5 la expresión decimal es exacta. Si el denominador (de la fracción irreducible) tiene algún factor primo que no sea ni 2 ni 5 la fracción tendrá una expresión decimal periódica.

Todas las fracciones tienen expresión decimal exacta o periódica; y toda expresión decimal exacta o periódica se puede escribir en forma de fracción.

Pero ya sabes que existen números que no son racionales. Por ejemplo: $\sqrt{2}$ **no** puede ponerse como fracción. Todos estos números, por ejemplo $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, π … junto con los números racionales forman el conjunto de los **números reales**. A los números reales que no son números racionales se les llama **números irracionales**.

La expresión decimal de los **números irracionales** es de infinitas cifras no periódicas.

Por tanto

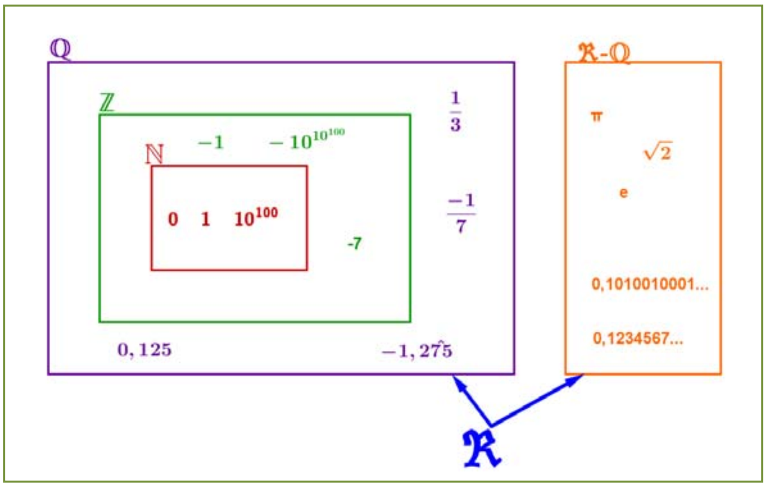
Irracionales ➔ $\mathbf{I} = \Re - \mathbf{Q}$.

El conjunto de los **números reales** está formado por la unión de los números racionales y de los números irracionales.

Reales ➔ $\Re = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$.

Tenemos por tanto que: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \Re$.

$\mathbf{I} \subset \Re$



Actividades propuestas

1. Mentalmente decide cuáles de las siguientes fracciones tienen una expresión decimal exacta y cuáles la tienen periódica:

   a) 1/9 b) 7/5 c) 9/50 d) 2/25 e) 1/8 f) 3/22

2. Halla la expresión decimal de las fracciones del ejercicio 1 y comprueba si tu deducción era correcta.

Autor: Jorge Muñoz y Paco Moya
Revisora: Rosa María Herrera
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. Calcula la expresión decimal de las fracciones siguientes:

a) 1/5 b) 1/3 c) 5/9 d) 2/25 e) 11/400 1/11

4. Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales exactas y redúcelas, después comprueba con la calculadora si está bien:

a) 8'35; b) 791'297835; c) 0'47

5. Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales periódicas, redúcelas y comprueba que está bien:

a) 9'464646….. b) 91'02545454…. c) 0'9999….. d) 3'267123123123…..

6. ¿Puedes demostrar que 4,99999… es igual a 5? ¿Calcula cuánto vale 2,5999…? *Ayuda*: Escríbelos en forma de fracción y simplifica.

7. Demuestra que $\sqrt[3]{7}$ es irracional.

8. ¿Cuántas cifras puede tener como máximo el periodo de $\frac{1}{47}$?

9. ¿Cuántos decimales tiene $\frac{1}{2^7 \cdot 5^4}$?, ¿te atreves a dar una razón?

10. Haz la división 999999:7 y después haz 1:7, ¿es casualidad?

11. Ahora divide 999 entre 37 y después 1:37, ¿es casualidad?

1.2. La recta real

Densidad de los números reales

Los números reales son **densos**, es decir, entre cada dos números reales hay infinitos números.

Eso es fácil de deducir, si *a*, *b* son dos números con *a* < *b* sabemos que $a < \frac{a+b}{2} < b$, es decir, la media está entre los dos números. Como esto podemos hacerlo las veces que queramos, pues de ahí el resultado.

Curiosamente los racionales son también densos, así como los irracionales.

Actividades propuestas

12. Escribe 3 números reales que estén entre $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y 1.

13. Escribe 5 números racionales que estén entre $\sqrt{2}$ y 1'5.

14. Escribe 5 números irracionales que estén entre 3'14 y π.

Autor: Jorge Muñoz y Paco Moya
Revisora: Rosa María Herrera
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Representación en la recta real de los números reales

Elegido el origen de coordenadas y el tamaño de la unidad (o lo que es igual, si colocamos el 0 y el 1) todo número real ocupa una posición en la recta numérica y al revés, todo punto de la recta se puede hacer corresponder con un número real.

El curso pasado estudiaste cómo representar en la recta real fracciones y raíces.

Actividades propuestas

15. Representa en la recta numérica los siguientes números:

a) $\frac{9}{5}$, b) $\frac{-13}{4}$, c) 1'342, d) –2'555555….

16. Representa en la recta numérica:

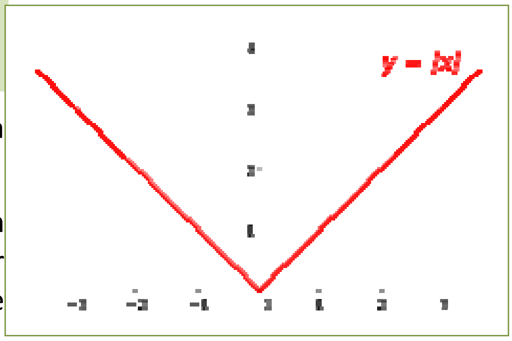
a) $\sqrt{10}$, b) $-\sqrt{6}$, c) $\sqrt{27}$, d) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

1.3. Valor absoluto

El valor absoluto o módulo de un número, equivale al valor de ese número ignorando el signo. Por ejemplo, el valor absoluto de –1 es 1, y el valor absoluto de +1, también es 1.

En lenguaje formal, el valor absoluto se define de la siguiente manera.

$$|x| = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$$



Si representamos esta función en un eje de coordenadas, resulta una gráfica como la del margen.

Como el valor absoluto es una función muy importante en matemáticas, tiene su propio símbolo. Para escribir el valor absoluto de un número x, basta con encerrar el número entre dos barras: $|x|$.

El valor absoluto de un número x se consigue suprimiendo el signo, y se anota mediante el símbolo $|x|$.

Ejemplo:

- El valor absoluto de –32 es 32, igual que el valor absoluto de +32. Escrito en lenguaje formal sería:

$$|-32| = 32 = |+32|.$$

Actividades propuestas

17. Halla el valor absoluto de los siguientes números: a) 5 b) –5 c) –π

¿Para qué sirve?

El valor absoluto se utiliza principalmente para definir cantidades y distancias en el mundo real. Los números negativos son una construcción matemática que se utiliza en el cálculo, pero en la realidad no existen cantidades negativas. No podemos viajar una distancia de –100 kilómetros, o comer –3 caramelos. Esto se debe a que el tiempo solo discurre en una dirección (positiva por convención), pero eso no entra en el ámbito de las matemáticas, sino en el de la física.

El valor absoluto se usa para expresar cantidades o longitudes válidas en el mundo real, como la distancia.

Ejemplo:

- Hago un viaje de ida y vuelta hasta una ciudad que se encuentra a 40 km de mi casa. Después de hacer el viaje, estoy en el mismo punto, así que mi posición no habrá cambiado, esto es:

Posición = 40 km – 40 km = 0

Esto no quiere decir que no haya recorrido una distancia. Hay dos cantidades a tener en cuenta, una distancia de ida y otra de vuelta, en total será:

L = |40| km + |–40| km = 80 km

Las propiedades del valor absoluto son:

- No negatividad: $|a| \geq 0$.
- Simetría: $|a| = |-a|$
- Definición positiva: $|a| = 0 \Rightarrow a = 0$.
- Valor absoluto y producto: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- Desigualdad triangular: $|a + b| \leq |a| + |b|$

Actividades resueltas

- *Demuestra que el valor absoluto nunca puede ser negativo.*

1 – No negatividad

Por definición, la función valor absoluto solo cambia el signo cuando el operando es negativo, así que no puede existir un valor absoluto negativo.

Demuestra que el valor absoluto de un número y su negativo coinciden.

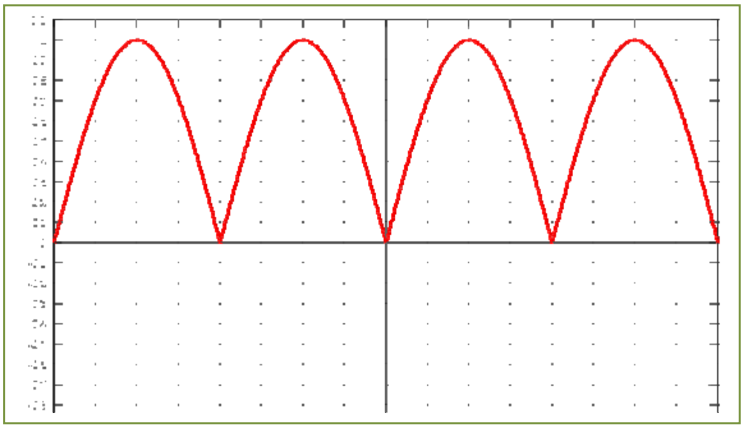
2 - Simetría.

Si $a > 0 \Rightarrow |a| = a$

Si $a < 0 \Rightarrow |-a| = -(-a) = a$

Entonces $a = |a| = |-a|$

- *Representa la función* $f(x) = |sen(x)|$



Autor: Jorge Muñoz y Paco Moya
Revisora: Rosa María Herrera

Actividades propuestas

18. Representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x^2|$

b) $f(x) = |x^2 - 1|$

c) $f(x) = |cos\ x|$

d) $f(x) = \left|\sqrt{x}\right|$

1.4. Distancia en la recta real

Una **distancia** es una medida que tiene unas determinadas propiedades:

1) No negatividad.

2) Simetría.

3) Propiedad triangular.

La distancia entre dos números reales x e y se define como:

$$\mathbf{Dist}(x, y) = |x - y|$$

Verifica las propiedades antes indicadas pues:

1) Al estar definida con el valor absoluto es siempre un número no negativo. La distancia entre dos puntos tiene valor cero, solo si los dos puntos son coincidentes:

$$0 = \text{Dist}(x, y) = |x - y| \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y.$$

2) Simetría: $\text{Dist}(x, y) = |x - y| = |y - x| = \text{Dist}(y, x)$.
3) Propiedad triangular: $\text{Dist}(x, y) \leq \text{Dist}(x, z) + \text{Dist}(z, y)$.

Ejemplo:

- $\text{Dist}(3, 8) = |8 - 3| = 5$
- $\text{Dist}(-2, -9) = |-9 - (-2)| = |-9 + 2)| = |-7| = 7$
- $\text{Dist}(-1, 5) = |5 - (-1)| = |5 + 1)| = |6| = 6$
- $\text{Dist}(-9, 5) = |5 - (-9)| = |5 + 9)| = |14| = 14$

Ejemplo:

- *Si estamos en el sótano 9º y subimos al piso 5º, ¿Cuántos pisos hemos subido?*

Como hemos visto en el ejemplo anterior, hemos subido en total 14 pisos.

$$\text{Dist}(-9, 5) = |5 - (-9)| = |5 + 9)| = |14| = 14.$$

- *Si el termómetro marca* –1 ºC *y luego marca* 5 ºC, *¿cuántos grados ha subido la temperatura?*

Como hemos visto en el ejemplo anterior, la temperatura ha subido 6 ºC. Fíjate que la escala termométrica que hemos usado es la Celsius, hay otras, pero esto lo estudiarás en física.

$$\text{Dist}(-1, 5) = |5 - (-1)| = |5 + 1)| = |6| = 6.$$

Actividades propuestas

19. Representa en la recta real y calcula la distancia entre los números reales siguientes:

a) Dist(5 , 9)

b) Dist(−2'3 , −4'5)

c) Dist(−1/5 , 9/5)

d) Dist(−3'272727…. , 6'27272727….).

1.5. Intervalos y entornos

Recuerda que:

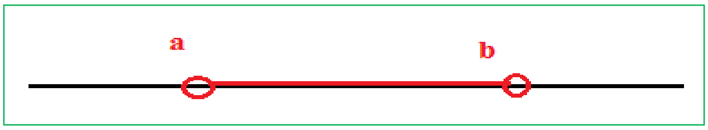
Un intervalo de números reales es un conjunto de números correspondientes a una parte de la recta numérica, en consecuencia, un intervalo es un subconjunto del conjunto de los números reales.

Tipos de intervalos

Intervalo abierto: es aquel en el que los extremos no forman parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos forman parte del intervalo, salvo los propios extremos.

En otras palabras $I = (a, b) = \{x \in \Re \mid a < x < b\}$, observa que se trata de desigualdades estrictas.

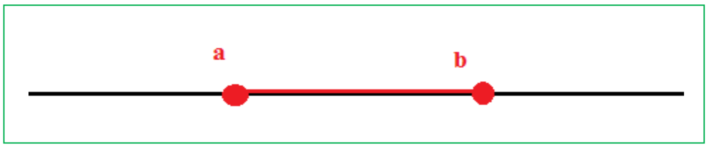
Gráficamente, lo representamos en la recta real del modo siguiente:



Intervalo cerrado: es aquel en el que los extremos si forman parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos, incluidos éstos, forman parte del intervalo.

En otras palabras $I = [a, b] = \{x \in \Re \mid a \le x \le b\}$, observa que ahora no se trata de desigualdades estrictas.

Gráficamente:



Intervalo semiabierto: es aquel en el que solo uno de los extremos forma parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos, incluido uno de estos, forman parte del intervalo.

Intervalo semiabierto por la izquierda, el extremo inferior no forma parte del intervalo, pero el superior si, en otras palabras,

$$I = (a, b] = \{x \in \Re \mid a < x \le b\},$$

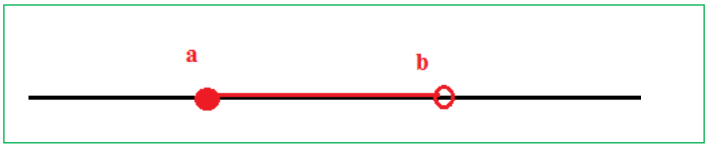
observa que el extremo que queda fuera del intervalo va asociado a una desigualdad estricta.

Intervalo semiabierto por la derecha, el extremo superior no forma parte del intervalo, pero el inferior si, en otras palabras $I = [a, b) = \{x \in \Re \mid a \le x < b\}$, observa que el extremo que queda fuera del

Autor: Jorge Muñoz y Paco Moya
Revisora: Rosa María Herrera
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

intervalo va asociado a una desigualdad estricta.

Gráficamente:



Semirrectas reales

Semirrecta de los números positivos S+ = (0 , ∞), es decir, desde cero hasta infinito.

Semirrecta de los números negativos S- = (–∞, 0), es decir, desde el menos infinito, el infinito negativo, hasta cero.

Con lo que toda la recta de los números reales es $\Re$ = (–∞, ∞) = (S+) ∪ (S-) ∪ {0}.

A una semirrecta se la puede considerar como un intervalo infinito.

Entornos

Es una forma especial de expresar los intervalos abiertos.

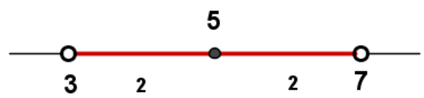
Se define el entorno de centro a y radio r y se denota ***E*(*a*, *r*)** (otra forma usual es $E_r(a)$) como el conjunto de números que están a una **distancia de *a* menor que *r***.

Con un ejemplo lo entiendes mejor:

Ejemplo:

- El entorno de centro 5 y radio 2 son los números que están de 5 una distancia menor que 2. Si lo pensamos un poco, serán los números entre 5 – 2 y 5 + 2, es decir, el intervalo (3, 7). Es como coger el compás y con centro en 5 marcar con abertura 2.

$$E(5,2) = (3,7) \Rightarrow$$



Fíjate que el 5 está en el centro y la distancia del 5 al 7 y al 3 es 2.

$E(a, r) = (a - r, a + r)$

Ejemplo:

- *E*(2, 4) = (2 – 4, 2 + 4) = (–2, 6)

Es muy fácil pasar de un entorno a un intervalo. Vamos a hacerlo al revés.

Ejemplo:

- *Si tengo el intervalo abierto* (3, 10), ¿cómo se pone en forma de entorno?

Hallamos el punto medio $\frac{3+10}{2} = \frac{13}{2}$ = 6’5 que será el centro del entorno. Nos falta hallar el radio:

(10 – 3) : 2 = 3’5 es el radio (la mitad del ancho). Por tanto (3, 10) = *E*(6’5, 3’5)

Autor: Jorge Muñoz y Paco Moya
Revisora: Rosa María Herrera
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

En general:

El intervalo $(b\ ,\ c)$ es el entorno $E\left(\frac{b+c}{2},\frac{c-b}{2}\right)$.

Ejemplo:

- *El intervalo* (–8, 1) = $E\left(\frac{-8+1}{2},\frac{1-(-8)}{2}\right) = E(-3'5,\ 4'5)$

También existen los entornos cerrados pero son de uso menos frecuente.

Actividades propuestas

20. Escribe los siguientes intervalos mediante conjuntos y represéntalos en la recta real:

a) [1, 7) b) (–3, 5) c) (2, 8] d) (–∞, 6)

21. Representa en la recta real y escribe en forma de intervalo:

a) $2 < x < 5$ b) $4 < x$ c) $3 \leq x < 6$ d) $x \leq 7$

22. Expresa como intervalo o semirrecta, en forma de conjunto (usando desigualdades) y representa gráficamente:

a) Un porcentaje superior al 26 %.
b) Edad inferior o igual a 18 años.
c) Números cuyo cubo sea superior a 8.
d) Números positivos cuya parte entera tiene 3 cifras.
e) Temperatura inferior a 25 ºC.
f) Números para los que existe su raíz cuadrada (es un número real).
g) Números que estén de 5 a una distancia inferior a 4.

23. Expresa en forma de intervalo los siguientes entornos:

a) *E*(1, 5)
b) *E*(–2, $\frac{8}{3}$)
c) *E*(–10, 0’001)

24. Expresa en forma de entorno los siguientes intervalos:

a) (4, 7)
b) (–7, –4)
c) (–3, 2)

25. ¿Los sueldos superiores a 500 € pero inferiores a 1000 € se pueden poner como intervalo de números reales? **Pista*: 600,222333€ ¿puede ser un sueldo?

Autor: Jorge Muñoz y Paco Moya
Revisora: Rosa María Herrera
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. NÚMEROS COMPLEJOS

2.1. Necesidad de los números complejos. El número i.

En el campo real la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución. El cuadrado de un número real es siempre positivo y al sumarle 1 es imposible que nos de 0.

Pero si se denomina $\mathbf{i}$ a la raíz cuadrada de –1, entonces

$\mathbf{i}^2 = -1$, por lo que es una solución de dicha ecuación.

$$\mathbf{i}^2 = -1 \Leftrightarrow \mathbf{i} = \sqrt{-1}$$

Pero no solo eso. Resulta que introduciendo únicamente ese elemento nuevo, se puede demostrar lo que se denomina el *Teorema Fundamental del Álgebra*, que fue probado por Gauss (1799), y enseña que toda ecuación polinómica de grado *n* tiene exactamente *n* raíces (en el campo complejo). Vamos pues a estudiar estos números complejos.

Carl Friedrich Gauss (1 777 – 1 855)

2.2. Números complejos en forma binómica. Operaciones

Un ***número complejo*** se define como una expresión de la forma:

$$\boldsymbol{z = x + \mathrm{i}y}$$

donde x e y son números reales.

Este tipo de expresión, $z = x + \mathrm{i} \cdot y$, se denomina ***forma binómica***.

Se llama ***parte real*** de $z = x + \mathrm{i}y$ al número real x, que se denota $\boldsymbol{Re(z)}$, y ***parte imaginaria*** de $z = x + \mathrm{i}y$, al número real y, que se denota $\boldsymbol{Im(z)}$, por lo que se tiene entonces que: $z = Re(z) + \mathrm{i}Im(z)$.

El ***conjunto de los números complejos*** es, por tanto,

$$\mathbf{C} = \{z = x + \mathrm{i}\cdot y;\ x, y \in \Re\};\ \mathbf{Re}(z) = x;\ \mathbf{Im}(z) = y.$$

Esta construcción permite considerar a los números reales como un subconjunto de los números complejos, siendo ***real*** aquel número complejo de parte imaginaria nula. Así, los números complejos de la forma $z = x + \mathrm{i}\cdot 0$ son números reales y se denominan números ***imaginarios*** a los de la forma $0 + \mathrm{i}\cdot y$, es decir, con su parte real nula.

Dos números complejos $z_1 = x + \mathrm{i}y$ y $z_2 = u + \mathrm{i}v$ son ***iguales*** si y solo si tienen iguales sus partes reales y sus partes imaginarias: $x = u$, $y = v$.

- #### Operaciones en forma binómica

Las operaciones de suma y producto definidas en los números reales se pueden extender a los números complejos. Para la suma y el producto de dos números complejos escritos en la forma binómica: $x + \mathrm{i}y$, $u + \mathrm{i}v$ se tienen en cuenta las propiedades usuales del Álgebra con lo que se definen:

Suma: $(x + \mathrm{i}y) + (u + \mathrm{i}v) = (x + u) + \mathrm{i}\,(y + v)$

Producto: $(x + \mathrm{i}y)\,(u + \mathrm{i}\,v) = (x\,u - y\,v) + \mathrm{i}\,(x\,v + y\,u)$

Se comprueba, de nuevo, que el cuadrado del número complejo i es un número real negativo, –1, pues:

$$(0 + \mathrm{i}) \cdot (0 + \mathrm{i}) = -1 + \mathrm{i}\cdot(0) = -1.$$

Si los números complejos son números reales, es decir, números complejos con su parte imaginaria nula, estas operaciones se reducen a las usuales entre los números reales ya que:

$$(x + \mathrm{i}0) + (u + \mathrm{i}0) = (x + u) + \mathrm{i}\,(0) \qquad (x + \mathrm{i}\cdot 0)\,(u + \mathrm{i}0) = (x\,u) + \mathrm{i}\,(0)$$

Esto permite considerar al cuerpo de los números reales $\Re$ como un subconjunto de los números complejos, $\boldsymbol{C}$. El conjunto de los números complejos también tiene estructura algebraica de cuerpo.

El ***conjugado*** del número complejo $z = x + y\mathrm{i}$, se define como: $\bar{z} = x - y\mathrm{i}$.

Actividades resueltas

- *Calcula* $(2 - \mathrm{i}) \cdot (1 + 2\mathrm{i})$

Para calcular $(2 - \mathrm{i}) \cdot (1 + 2\mathrm{i})$ se procede con las reglas usuales del Álgebra teniendo en cuenta que $\mathrm{i}^2 = -1$:

$$(2 - \mathrm{i})\cdot(1 + 2\mathrm{i}) = 2 + 4\mathrm{i} - \mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2 = 2 + 4\mathrm{i} - \mathrm{i} + 2 = 4 + 3\mathrm{i}.$$

- *El conjugado del número complejo $z = 3 + 5i$, es* $\bar{z} = 3 - 5\mathrm{i}$.
- *Para dividir números complejos se multiplica, numerador y denominador por el conjugado del denominador, y así se consigue que el denominador sea un número real:*

$$\frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1(1-i)}{1^2-(i)^2} = \frac{2(1-i)}{1-(-1)} = \frac{2(1-i)}{2} = 1-i\,.$$

- *Para elevar a potencias la unidad imaginaria, se tiene en cuenta que $i^2 = -1$, y por tanto:*

$$\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}, \qquad \mathrm{i}^4 = 1: \qquad \mathrm{i}^6 = -1, \qquad \mathrm{i}^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{1\cdot i}{(-i)(i)} = \frac{i}{-i^2} = \frac{i}{1} = i.$$

- *Calcula* $(1 + \mathrm{i})^4$.

Utilizando el binomio de Newton se obtiene:

$$(1+\mathrm{i})^4 = \binom{4}{0}1^4 + \binom{4}{1}\mathrm{i} + \binom{4}{2}\mathrm{i}^2 + \binom{4}{3}\mathrm{i}^3 + \binom{4}{4}\mathrm{i}^4 = 1 + 4\mathrm{i} - 6 - 4\mathrm{i} + 1 = -4.$$

Actividades propuestas

26. Comprueba que:

a) $(1 - \mathrm{i})^4 = -4$

b) $\dfrac{5+10\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} + \dfrac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = -2$

c) $(1 + \mathrm{i})^5 = -4 - 4\mathrm{i}$

27. Realiza las siguientes operaciones con números complejos:

a) $\frac{68}{(1-\text{i})\cdot(2-\text{i})\cdot(3-\text{i})}$

b) $(2 + \text{i}) - \text{i}\,(1 - 2\text{i})$

c) $\frac{2+\text{i}}{4-3\text{i}}+\frac{3+\text{i}}{5\text{i}}$

d) $(3 - 2\text{i})\,(3 + 2\text{i})$

28. Calcula: (*Ayuda*: sustituye z por $x + \text{i}y$)

a) $Im\,\frac{\bar{z}}{z}$

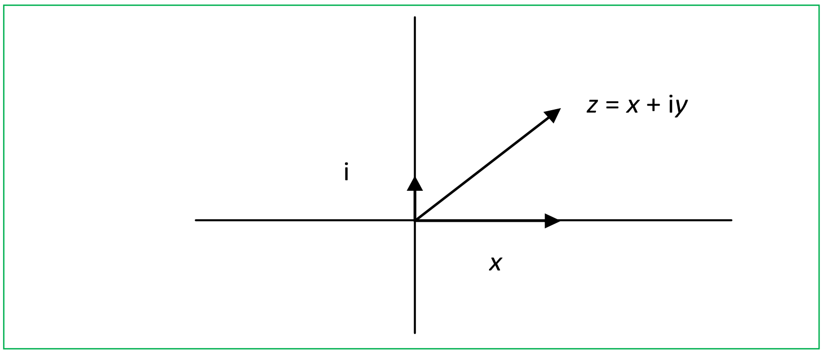
b) $Re(z^4)$

c) $(Re(z))^4$

Representación de los números complejos en el plano

El desarrollo moderno de los números complejos empezó con el descubrimiento de su interpretación geométrica que fue indistintamente expuesta por *John Wallis* (1685) y ya de forma completamente satisfactoria por *Caspar Wessel* (1799). El trabajo de *Wessel* no recibió ninguna atención, y la interpretación geométrica de los números complejos fue redescubierta por *Jean Robert Argand* (1806) y de nuevo por *Carl Friedrich Gauss* (1831).

El conjunto de los números complejos con las operaciones de suma y el producto por un número real tiene estructura de espacio vectorial de dimensión dos, y es, por tanto, isomorfo a $\Re^2$. Una base de este espacio está formada por el conjunto {1, i}.



Al igual que los números reales representan los puntos de una recta, los números complejos pueden ser puestos en correspondencia biunívoca con los puntos de un plano. Los números reales se representan en el eje de abscisas o eje real, y a los múltiplos de $\text{i} = \sqrt{-1}$ se les representa como puntos del eje imaginario, perpendicular al eje real en el origen. A esta representación geométrica se la conoce como el ***Diagrama de Argand***. El eje $y = 0$ se denomina **eje real** y el $x = 0$, **eje imaginario**.

Como la condición necesaria y suficiente para que $x + iy$ coincida con $u + iv$ es que $x = u$, $y = v$, el conjunto de los números complejos se identifica con $\Re^2$, y los números complejos se pueden representar como puntos del "plano complejo". El número complejo $z = x + iy$ se corresponde con la abscisa y la ordenada del punto del plano asociado al par (x , y). En unas ocasiones se refiere el número complejo z como el punto z y en otras como el vector $\mathbf{z}$.

La suma de números complejos corresponde gráficamente con la suma de vectores. Sin embargo, el producto de números complejos no es ni el producto escalar de vectores ni el producto vectorial.

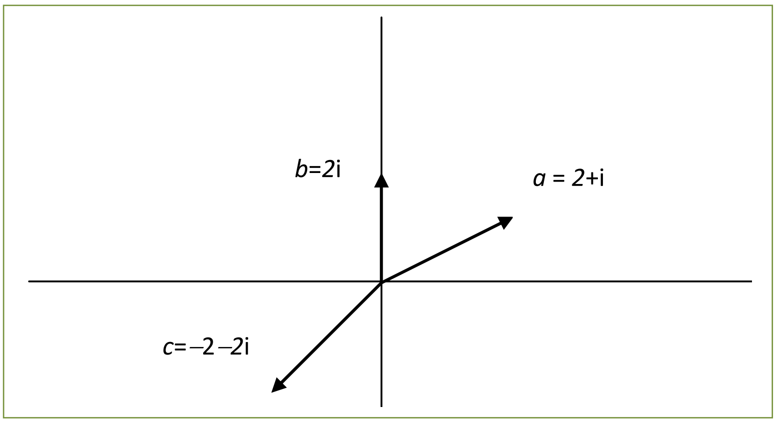
El conjugado de z, $\bar{z}$, es simétrico a z respecto del eje de abscisas.

Actividades resueltas

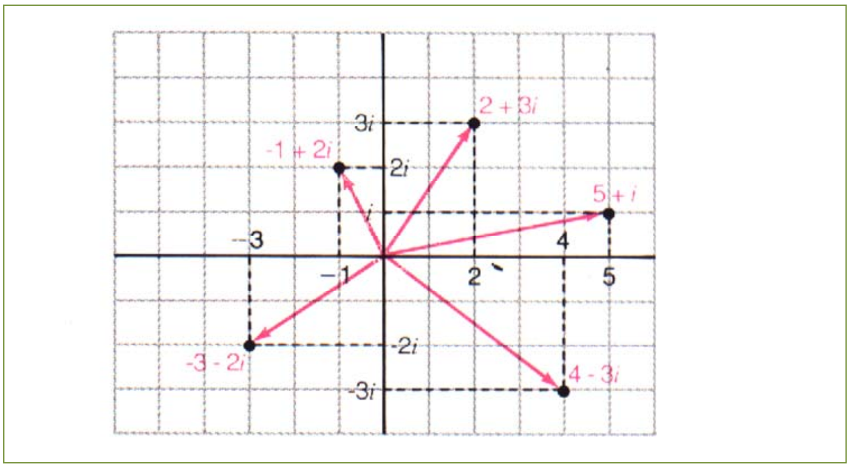
- *Representa en el plano los números complejos:* a = 2 + i, b = 2i y c = –2 – 2i.

Los números complejos a = 2 + i, b = 2i *y*

c = –2 – 2i se representan:

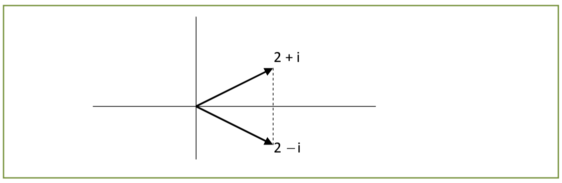


- *Representa en el plano los números complejos:* 2 + 3i, –1 + 2i, –3 –2i, 5 + i y 4 – 3i.



- *Representa el número complejo conjugado de* a = 2 + i.

El conjugado de a = 2 + i, 2 – i, se representa:

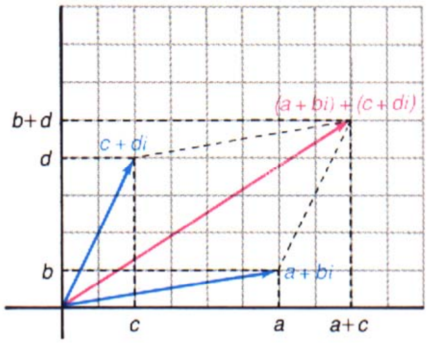


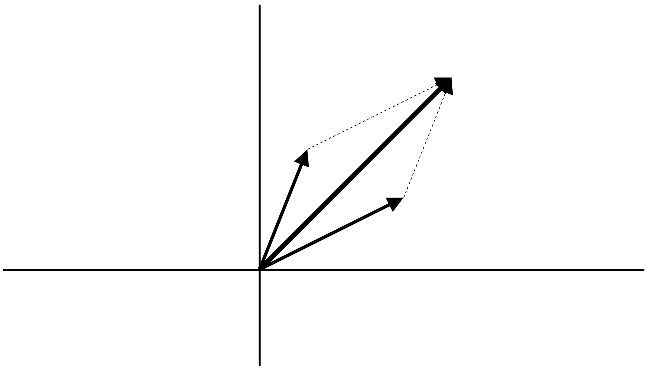
Se observa que es el simétrico de a respecto del eje de abscisas.

- *Representa la suma de dos números complejos.*

La suma se representa igual que la suma vectorial. Observa las dos gráficas inferiores, en la cuadrícula la suma de números complejos, junto a ella una suma vectorial.

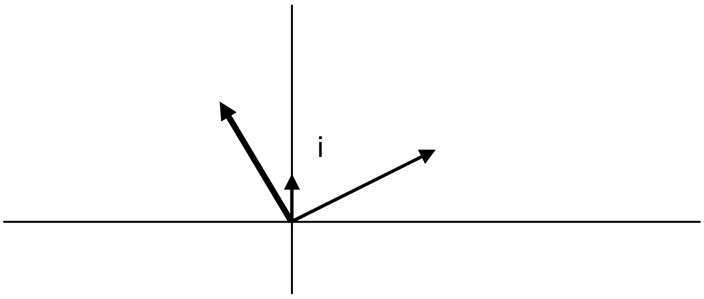
Autor: Jorge Muñoz y Paco Moya
Revisora: Rosa María Herrera
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF





Representa el producto del número complejo $2 + \mathrm{i}$ *por la unidad imaginaria:* i.

El producto de $2 + \mathrm{i}$ por i es igual a $-1 + 2\mathrm{i}$, y al representarlo se observa que multiplicar por la unidad imaginaria es girar 90º.



Actividades propuestas

Para los siguientes números complejos:

$$a = 3\mathrm{i};\ b = -2\mathrm{i};\ c = 5;\ d = 1 + \mathrm{i};\ e = -1 - \mathrm{i}$$

29. Represéntalos gráficamente.

30. Representa gráficamente el conjugado de cada uno de ellos.

31. Representa gráficamente las sumas:

$a + b \qquad a + c \qquad b + d \qquad d + e$

32. Representa gráficamente los productos:

$a \cdot \mathrm{i} \qquad b \cdot \mathrm{i} \qquad c \cdot \mathrm{i} \qquad \mathrm{d} \cdot \mathrm{i} \qquad e \cdot \mathrm{i}$

Analiza el resultado. Comprueba que multiplicar por i supone girar 90º el número complejo.

2.3. Forma trigonométrica de los números complejos. Operaciones

Módulo

El ***módulo*** de un número complejo se define como $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, y representa la distancia de *z* al origen, es decir, la longitud del vector libre (x, y) de $\mathfrak{R}^2$.

Por tanto el módulo nunca puede ser un número real negativo. El módulo de un número real coincide con su valor absoluto.

Recuerda, la raíz cuadrada (sin signos delante) es siempre positiva.

Aunque no tiene sentido decir si $z_1 < z_2$, salvo que sean números reales, sí tiene sentido la desigualdad $|z_1| < |z_2|$ y significa que z_1 está más próximo al origen que z_2.

Otra forma de expresar el módulo de un número complejo es mediante la expresión $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ donde $\bar{z}$ es el conjugado de z, siendo el producto de un número complejo por su conjugado igual a:

$$(x + \mathrm{i}\cdot y)\,(x - \mathrm{i}\cdot y) = x^2 + y^2$$

un número real y positivo.

Argumento

El ***argumento*** de un número complejo z, si $z \neq 0$, representa el ángulo, en radianes, que forma el vector de posición con el semieje de abscisas positivas.

Es por tanto cualquier número real θ tal que $\cos\theta = \frac{x}{|z|}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{|z|}$. Se tiene entonces que cada número complejo no nulo tiene infinidad de argumentos, positivos y negativos, que se diferencian entre sí en múltiplos enteros de 2π.

Si z es igual a cero, su módulo es cero, pero su argumento no está definido.

Si se quiere evitar la multiplicidad de los argumentos se puede seleccionar para θ un intervalo semiabierto de longitud 2π, lo que se llama elegir una rama del argumento; por ejemplo, si se exige que $\theta \in (-\pi, \pi]$, (o para otros autores a $[0, 2\pi)$), se obtiene el ***argumento principal*** de *z*, que se denota por $Arg(z)$. Si z es un número real negativo su argumento principal vale π. En ocasiones es preferible utilizar argumentos multivaluados:

$$\boldsymbol{arg(z) = \{Arg(z) + 2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}}$$

donde **Z** representa el conjunto de los números enteros.

Si se define $Arg(z)$ como $arctg(y/x)$ se tiene una nueva ambigüedad, ya que existen dos ángulos en cada intervalo de longitud 2π de los cuales sólo uno es válido. Por todo ello, las afirmaciones con argumentos deben ser hechas con una cierta precaución, pues por ejemplo la expresión:

$$arg(z\cdot w) = arg(z) + arg(w)$$

es cierta si se interpretan los argumentos como multivaluados.

Si z es distinto de cero, $\bar{z}$ verifica que $|\bar{z}| = |z|$ y que $Arg(\bar{z}) = -Arg(z)$.

Propiedades del módulo, del conjugado y del argumento de un número complejo

Algunas propiedades del conjugado y del módulo de un número complejo son:

1. $\forall\, z, w \in \mathbf{C}$, $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, $\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$.

2. $\forall\, z \in \mathbf{C}$, $Arg(\bar{z}) = -Arg(z)$, $arg(\bar{z}) = -arg(z)$.

3. $z \in \Re \Leftrightarrow z = \bar{z}$.

4. $\forall\, z, w \in \mathbf{C}$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, $|\bar{z}| = |z|$, $|zw| = |z| \cdot |w|$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.

5. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

6. $\forall\, z \in \mathbf{C}$, $Re(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $Im(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$.

7. $\forall\, z \in \mathbf{C}$, $|Re(z)| \le |z|$, $|Im(z)| \le |z|$, $|z| \le |Re(z)| + |Im(z)|$

8. $\forall\, z, w \in \mathbf{C}$, $\big||z| - |w|\big| \le |z+w| \le |z| + |w|$

Se observa que las desigualdades 7 y 8 son siempre entre números reales, no entre complejos, por lo que sí tiene sentido escribir una desigualdad.

La segunda parte de la propiedad 8 se conoce con el nombre de desigualdad triangular.

Las propiedades del módulo prueban que éste es una distancia en el espacio vectorial $\mathbf{C}$.

Forma polar y forma trigonométrica

Si ρ es igual al módulo del número complejo no nulo z y θ es un argumento de z, entonces (ρ, θ) son las ***coordenadas polares*** del punto z.

La *conversión* de coordenadas polares en cartesianas y viceversa se hace mediante las expresiones:

$$x = \rho \cdot cos\ \theta,\ y = \rho \cdot sen\ \theta, \text{ por lo que } z = x + \mathrm{i}y = \rho \cdot (cos\ \theta + \mathrm{i} \cdot sen\ \theta).$$

Esta última expresión es válida incluso si $z = 0$, pues entonces $\rho = 0$, por lo que se verifica para todo θ.

Autor: Jorge Muñoz y Paco Moya
Revisora: Rosa María Herrera

Actividades resueltas

- *Calcula el módulo de los siguientes números complejos: –2 + 3i y 4 + i.*

Al calcular $|-2+3\mathrm{i}|=\sqrt{13}$ y $|4+i|=\sqrt{17}$ se sabe que el primero dista menos del origen que el segundo.

- *Calcula el argumento de los siguientes números complejos: 5i, –7i, 3 y –3.*

El argumento principal de 5i es igual a $\frac{\pi}{2}$, el de –7i es $\frac{3\pi}{2}$, el de 3 vale 0 y el –3 es π.

- *Escribe en forma binómica el número complejo de módulo 2 y argumento* $\frac{\pi}{3}$.

El número complejo de módulo 2 y argumento principal $\frac{\pi}{3}$ es $1+\sqrt{3}$ i, ya que:

$$x = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1 \text{ e } y = 2sen\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

- *Calcula el módulo y el argumento de: –1 – i.*

El número complejo –1 – i tiene de módulo $\rho = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$.

Uno de sus argumentos es $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$, y su argumento principal es $\frac{-3\pi}{4}$, por tanto

$$arg(-1-\mathrm{i}) = \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi.$$

- *Comprueba si se verifica que $Arg(z \cdot w) = Arg(z) + Arg(w)$.*

Se verifica que $arg(z \cdot w) = arg(z) + arg(w)$ considerando estos argumentos como conjuntos, y en general no se verifica que $Arg(z \cdot w) = Arg(z) + Arg(w)$, pues por ejemplo:

$$Arg((-\mathrm{i})^2) = Arg(-1) = \pi, \text{ mientras } Arg(-\mathrm{i}) + Arg(-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi.$$

Actividades propuestas

33. Calcula el modulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

a) $\sqrt{3}-i$ b) –2 – 2i

c) $1-\sqrt{3}\,i$ d) –4i

34. Expresa en forma polar los siguientes números complejos:

a) i b) –i c) 4 + 4i d) –4

Operaciones entre números complejos en forma trigonométrica

Para ***multiplicar*** números complejos expresados en forma trigonométrica basta multiplicar sus módulos y sumar sus argumentos:

La relación entre números complejos y transformaciones geométricas, donde multiplicar por i corresponde a girar 90º, y multiplicar por $a + b$i es girar el argumento de dicho número y aplicar una homotecia de razón su módulo, es muy útil en la Mecánica y en otras partes de la Física.

Para ***dividir*** números complejos, basta dividir sus módulos y restar sus argumentos:

El ***inverso*** de un número complejo distinto de cero tiene como módulo, el inverso del módulo, y como argumento, el opuesto del argumento:

Para elevar un número complejo a una ***potencia***, se eleva el módulo a dicha potencia, y se multiplica el argumento por el exponente.

Para calcular la ***raíz n-ésima*** de un número complejo, $w = \sqrt[n]{z}$, se tiene en cuenta el módulo r debe ser igual a $r = \sqrt[n]{\rho}$, pero al tener un número complejo muchos argumentos, ahora el argumento no es único, sino que se tienen *n* argumentos distintos, e iguales a $\alpha = \frac{\theta + 2\mathrm{k}\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2\mathrm{k}\pi}{n}$, donde *k* toma los valores desde 0 hasta n – 1 antes de que dichos valores comiencen a repetirse.

Por tanto, la función raíz n-ésima es una función multivalorada, con *n* valores que se pueden representar gráficamente en los vértices de un n-ágono regular de centro el origen y radio, el módulo $r = \sqrt[n]{\rho}$, pues todas las raíces están situadas en la circunferencia de radio $r = \sqrt[n]{\rho}$ uniformemente espaciadas cada $\frac{2\pi}{n}$ radianes.

A modo de ejemplo vamos a demostrar la fórmula del producto de números complejos.

Demostración:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho\cdot(\cos \theta + \mathrm{i}\cdot \mathrm{sen}\, \theta) \cdot r\cdot(\cos \alpha + \mathrm{i}\cdot \mathrm{sen}\, \alpha)$$

$$= (\rho\cdot r) \cdot [\cos \theta \cdot \cos \alpha - \mathrm{sen}\, \theta \cdot \mathrm{sen}\, \alpha] + \mathrm{i}\cdot[\cos \theta \cdot \mathrm{sen}\, \alpha + \mathrm{sen}\, \theta \cdot \cos \alpha] = (\rho\cdot r)\cdot(\cos (\theta+\alpha) + \mathrm{i}\cdot \mathrm{sen}\, (\theta+\alpha)).$$

Fórmula de *Moivre*

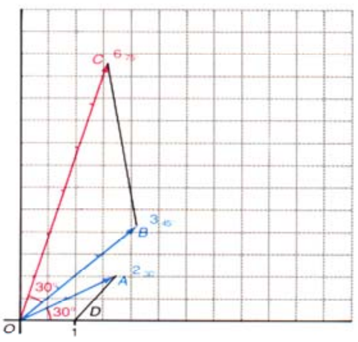
Al aplicar la fórmula obtenida de una potencia al número complejo de módulo uno, se obtiene que:

$(\cos \theta + \mathrm{i}\cdot \mathrm{sen}\, \theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\cdot \mathrm{sen}(n\theta)$, cualquiera que sea el número entero n.

Esta expresión, que permite conocer *sen*(nx) o *cos*(nx) en función de $\cos x$ y $\mathrm{sen}\, x$ desarrollando la potencia mediante el binomio de Newton y separando partes real e imaginaria, se conoce como *fórmula de Moivre*.

Actividades resueltas

- *Representa gráficamente el producto de los números complejos:* 2(cos(π/6) + isen(π/6)) y de 3(cos(π/4) + i sen(π/4)).



- *Calcula:* $\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}$

Para dividir $\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}$ se pueden escribir los números complejos en forma polar y dividir los módulos y restar los argumentos. El módulo de –2 es 2 y su argumento es π. El módulo de $1+\sqrt{3}i$ es 2 y su argumento es π/3. Por tanto el módulo del cociente es 1 y su argumento es π – π/3 =2π/3. El número complejo de módulo 1 y argumento 2π/3 escrito en forma binómica es:

$$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Decir que su módulo es 1 es decir que está sobre la circunferencia de centro el origen y radio 1.

- *Calcula:* $\left(\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}\right)^{60}$

Para calcular una potencia, en general es mucho más sencillo utilizar la forma polar en vez de aplicar la fórmula del binomio de Newton. Por ejemplo, si se quiere calcular $\left(\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}\right)^{60}$, es mucho más práctico calcular el módulo y el argumento de $\left(\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}\right)^{60}$ que ya sabemos por la actividad anterior que es: 1 y 2π/3, por lo que elevamos 1 a la potencia 60 y obtenemos 1, y multiplicamos 2π/3 por 60 y obtenemos 40π. Escribimos el forma binómica el número complejo de módulo 1 y un argumento que es múltiplo de 2π, por lo que la solución es 1.

- *Calcula la raíz cúbica de* –1.

Para calcular una raíz n-ésima se debe recordar que se tienen n raíces distintas:

$$\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{1\,e^{\pi i}}=\left\{\begin{array}{l} 1\,e^{\frac{\pi}{3}i}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \\ 1\,e^{(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3})i}=e^{\pi i}=-1 \\ \\ 1\,e^{(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi\pi}{3})i}=e^{\frac{5\pi}{3}i}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right\}$$

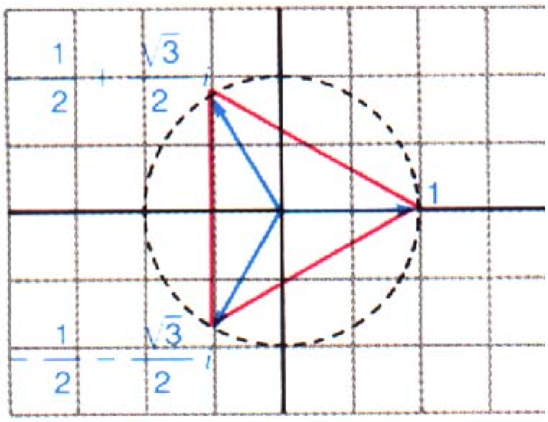
Autor: Jorge Muñoz y Paco Moya
Revisora: Rosa María Herrera
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

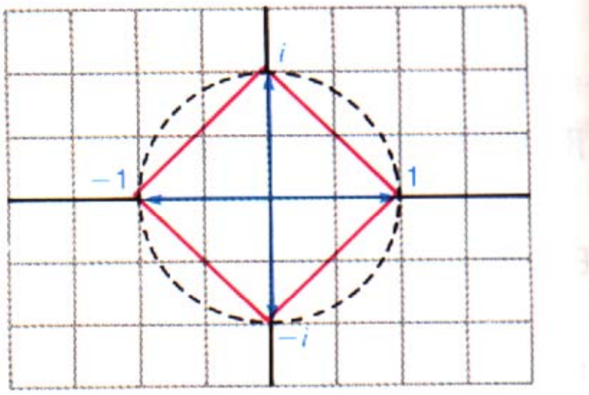
Resuelve $z^3 = -1$.

Esto permite resolver ecuaciones. Así, las soluciones de la ecuación cúbica $z^3 = -1$ son tres:

la raíz real –1, y las raíces complejas conjugadas: $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Representa gráficamente las raíces cúbicas y cuartas de la unidad.





Actividades propuestas

35. Comprueba los resultados siguientes:

a) $(1 + i)^{16} = 2^8 = 256$.

b) $$\sqrt[3]{27i} = \begin{Bmatrix} 3\,e^{i\frac{\pi}{6}} \\ 3\,e^{i\frac{5\pi}{6}} \\ 3\,e^{i\frac{9\pi}{6}} \end{Bmatrix}$$

Autor: Jorge Muñoz y Paco Moya
Revisora: Rosa María Herrera
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

36. Realiza las siguientes operaciones con números complejos, expresándolos previamente en forma exponencial:

a) $\dfrac{\sqrt{2}\mathrm{i}}{-2-2\mathrm{i}}$

b) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^{30}$

37. Resuelve las ecuaciones, obteniendo las raíces reales y complejas:

a) $x^2 = -1$

b) $x^3 = -8$

c) $x^4 + 16 = 0$

38. Calcula las raíces *n*-ésimas de la unidad, para *n* = 2, 3 y 4. Representarlas gráficamente, y comprobar que están sobre la circunferencia de radio 1, y en los vértices de un polígono regular.

Autor: Jorge Muñoz y Paco Moya
Revisora: Rosa María Herrera
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Números complejos

Gauss

Números imaginarios

Un milagro de las Matemáticas

Stiillwell

Números imposibles

Una especie de anfibio entre el ser y la nada

Monstruo

Euler

Resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$ es imposible

Todas las ecuaciones polinómicas de grado *n* tienen exactamente *n* raíces en el campo complejo.

Teorema Fundamental del Álgebra

Un chiste

- Me dicen que ese número de teléfono no existe, que es imaginario.

- Intenta girar 90º el teléfono.

¿Lo has entendido? Los chistes no se explican, pero como es un chiste matemático…

Piensa en un número imaginario, por ejemplo, –2i. Si lo giras 90º se convierte en 2, y ya es real.

La resolución de la paradoja de $\sqrt{-1}$ fue muy poderosa, inesperada y bella por lo que únicamente la palabra "milagro" parece adecuada para describirla.

Stillwel

Utilidad

Los números complejos y la variable compleja se utiliza para estudiar electricidad, magnetismo y en la teoría del potencial, entre otros muchos campos

Autor: Jorge Muñoz y Paco Moya
Revisora: Rosa María Herrera
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Una fórmula maravillosa

En la Exposición Universal de París de 1937, la misma para la que Picasso pintó el Guernica, en la entrada del pabellón de Matemáticas había un enorme rótulo que decía:

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Una igualdad que relaciona números como el 0 y el 1, con números irracionales como e y π, y con el número complejo i.

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

¿Quieres saber de dónde sale?

Euler expresó, mediante la fórmula que lleva su nombre, que:

$$\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha = e^{i\alpha}.$$

Ya conoces que un número complejo de módulo m y argumento α se escribe en forma trigonométrica como: $m(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$, por lo que utilizando la fórmula de Euler se obtiene su **expresión exponencial**:

$$m(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) = me^{i\alpha}.$$

El número –1 tiene de módulo 1 y de argumento π, por lo que su expresión exponencial es:

$$-1 = e^{\pi i} \Leftrightarrow e^{\pi i} + 1 = 0$$

Autor: Jorge Muñoz y Paco Moya
Revisora: Rosa María Herrera
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Algo de historia de los números complejos

El desarrollo de las Matemáticas está íntimamente relacionado con la historia del número. Como el producto de un número real por sí mismo es siempre positivo es claro que se necesita ampliar el campo numérico para dar solución a determinadas ecuaciones.

Los números complejos se empiezan a utilizar para obtener soluciones de ecuaciones algebraicas y culminan, en este sentido, cuando se demuestra el teorema fundamental del Álgebra.

Usualmente se dice que los números complejos nacen de la necesidad de resolver la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$, con la dificultad de que carece de sentido geométrico el que un cuadrado tenga un área negativa. Sin embargo, esto no es enteramente cierto.

Muchas ecuaciones cuadráticas, como círculos o parábolas, están ya implícitas en la geometría de los **griegos** y entonces se analizó si tenían o no solución real, por ejemplo, la intersección de una recta con dichas figuras.

Los **babilonios**, alrededor del año 2000 antes de Cristo, conocían esencialmente el método para resolver ecuaciones cuadráticas, y Herón de Alejandría (100 a. C.) utilizó $\sqrt{-63}$, aunque algebraicamente, sin preguntarse por su significado, pues por aquellos tiempos no se especulaba acerca de la naturaleza de las raíces imaginarias.

Sin embargo cuando en 1545 Girolamo Cardano escribió:

$$40 = (5 + \sqrt{-15})\cdot(5 - \sqrt{-15})$$

estos números fueron considerados sin sentido y se les aplicó el término de *"imaginarios"*.

Incluso cuando aparecen las ecuaciones cuadráticas, con Diofanto o los árabes, no hay razón para admitir que no tengan solución.

Se necesitan cuando Del Ferro, Tartaglia y Cardano intentan resolver la ecuación cúbica $x^3 = p\cdot x + q$ en cuya fórmula de solución aparecen números complejos (cuando $(q/2)^2 - (p/3)^2 < 0$) y sin embargo tiene siempre una solución real.

Bombelli en 1572 trabajó formalmente con el álgebra de los números complejos e implícitamente introdujo las funciones complejas, aunque a pesar de ello los números complejos todavía eran considerados como imposibles.

Al final del siglo XVIII ya se tenía una gran maestría en la manipulación de los números complejos y sin embargo no se tenía la noción de un número complejo como un par de números reales formado por su parte real y su parte imaginaria.

C. Wessel, en 1799, asoció todo número complejo con un vector del plano con origen en *O*, y reinterpretó con estos vectores las operaciones elementales de los números complejos. R. Argand en 1806 interpretó geométricamente los números complejos. El número i, por ejemplo, lo representó como una rotación de un ángulo recto alrededor del origen. A partir de dicha interpretación ya empezaron a usarse sin dificultades dichos números.

RESUMEN

		Ejemplos
Números reales	Está formado por la unión de los números racionales y los números irracionales	5, –4, 2/3, 7’5, π, e, Φ…
Densidad de los Números Reales	El conjunto de los números reales es denso, es decir, entre cada dos números reales hay infinitos números.	Entre 0 y 1 calculando el punto medio obtenemos infinitos puntos: 0, 0’5, 0’25, 0’125, 0’0625,..., 1
Valor absoluto	$\|x\| = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$	|–32| = 32 = |+32|
Distancia en la recta real	Dist(*x*, *y*) = |*x* – y|	Dist(3, 8) = |8 – 3| = 5. Dist(–2, –9) = |–9 – (–2)| = |–9 + 2)| = |–7| = 7
Intervalos	Abierto : $(a, b) = \{x \in \Re \mid a < x < b\}$ Cerrado: $[a, b] = \{x \in \Re \mid a \leq x \leq b\}$ Semiabierto (izq): $(a, b] = \{x \in \Re \mid a < x \leq b\}$ Semiabierto (der): $[a, b) = \{x \in \Re \mid a \leq x < b\}$	(3, 5) [3, 5] (2, 8] [1, 7)
Entornos	Es una forma especial de expresar los intervalos abiertos. Se define como el conjunto de números que están a una distancia de *a* menor que *r*: E(*a* , *r*)	*E*(2 , 4) = (2 – 4 , 2 + 4) = (–2, 6)
El número i	$i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1}$	
Forma binómica	$z = x + i \cdot y$	
Suma de complejos	$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i \cdot (y + v)$	(2 + 3 i) + (4 + 5i) = 6 + 8i
Producto de complejos	$(x + iy) \cdot (u + iv) = (x \cdot u - y \cdot v) + i \cdot (x \cdot v + y \cdot u)$	$(2 - i) \cdot (1 + 2i) = 2 + 4i - i - 2i^2$ $= 2 + 4i - i + 2 = 4 + 3i$
División de complejos	Se multiplica, numerador y denominador por el conjugado del denominador. Así se consigue que el denominador sea un número real	$\frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2(1-i)}{2} =$
Forma trigonométrica	$z = r\,(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$	$z = 2 \cdot (\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{3})$
Producto de complejos	Se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos	$z \cdot z = 4 \cdot (\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\frac{2\pi}{3})$
División de complejos	Se dividen sus módulos y se restan sus argumentos	*z*/*z*=1·(cos 0 + i·sen 0) = 1
Fórmula de Moivre	$(\cos\theta + i \cdot sen\,\theta)^n = \cos(n\theta) + i \cdot sen(n\theta)$	

Autor: Jorge Muñoz y Paco Moya
Revisora: Rosa María Herrera
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Números reales

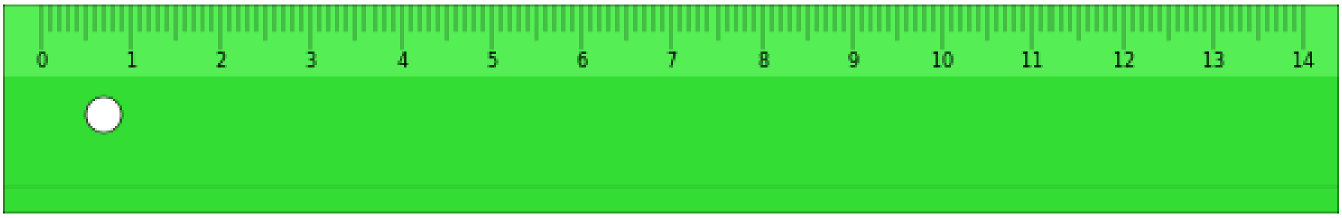
1. Calcula los valores exactos de $a + b$, $c - a$ y $a \cdot c$ para los números: (pista: racionalizar)

   a = 2'7 b = 3'292929... c = 0'01030303...

2. Descubre cuál de estos números es irracional:

   a) 3'1416 b) $\sqrt{4}$ c) π

3. ¿Podemos encontrar números irracionales en las marcas de una regla graduada? ¿Hay algún punto de la regla (aunque no tenga marca) que se corresponda con un número irracional? Justifica tu respuesta.



4. Clasifica los siguientes números en orden de mayor a menor y después represéntalos en la recta:

   a) 7

   b) 25/4

   c) $\sqrt{45}$

   d) $2 \cdot \pi$

5. Escribe una sucesión infinita de números reales dentro del intervalo (–1, 1).

6. Calcula el valor absoluto de los siguientes números:

   a) $|-5|$ b) $|4 - 4|$ c) $|3 \cdot 2 + 9|$ d) $\sqrt{7}$ e) $\sqrt{7^2}$

7. Calcula x en las siguientes ecuaciones: (*pista*: x puede tener dos valores)

   a) $|x| = 5$ b) $|x - 4| = 0$ c) $|3x + 9| = 21$

8. Dibuja las siguientes funciones en un gráfico:

a) $f(x) = |x| - 5$ b) $f(x) = |x - 4|$ c) $f(x) = |3x + 9|$

9. Elige un día y calcula la distancia que has recorrido en total, y compárala con la distancia entre los puntos inicial (al principio del día) y final (al terminar el día).

10. Un artesano fabrica dos productos. El primero (a) le cuesta 2 horas y 3 euros en material, y el segundo (b) le cuesta 6 horas y 30 euros de material. Si valora en 10 euros cada hora de trabajo, y los vende por (a) 30 y (b) 90 euros, averigua cuál es más rentable para su negocio.

11. Entre Kroflite y Beeline hay otras cinco ciudades. Las siete se encuentran a lo largo de una carretera recta, separadas unas de otras por una distancia entera de kilómetros. Las ciudades se encuentran espaciadas de tal manera que si uno conoce la distancia que una persona ha recorrido entre dos de ellas, puede identificarlas sin ninguna duda. ¿Cuál es la distancia mínima entre Kroflite y Beeline para que esto sea posible?

12. Representa en la recta real los números que verifican las siguientes relaciones:

a) $|x| < 1$

b) $|x| \leq 1$

c) $|x| > 1$

d) $|x| \geq 1$

13. Halla dos números que disten 6 unidades de 3, y otros dos que disten 3,5 unidades de –2, calcula después la diferencia entre el mayor y el menor de todos estos números.

14. Escribe el intervalo $[-3, 5] \cap (3, 8)$.

15. Escribe el intervalo formado por los números reales x que cumplen $|x - 8| \leq 3$.

16. Determina los conjuntos A ∩ B, A U B, A – B y –A en los casos siguientes:

a) A = [–11, –9]; B = (–1, 6)

b) A = [–5, 5]; B = (3, 4)

Números complejos

17. Comprueba si:

a) $\left|\frac{\bar{z}}{z}\right| = 1$.

b) $|\cos\alpha + i sen\alpha| = \left|e^{i\theta}\right| = 1$.

18. Calcula:

a) $(2 + i)^5$

b) $\frac{13}{|2-3i|}$

c) $\frac{(3+2i)^2}{(2+3i)^3}$

d) $i(\sqrt{3} - i)(1 + \sqrt{3}\,i)$

e) $(1 + i)^8$

f) $(1 + i)^{-1}$

g) $(\sqrt{3} + i)^{-9}$.

19. Demuestra que z es real si y solo si $z = \bar{z}$.

20. Verifica que el inverso de z, z^{-1}, es igual a $\frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$. Calcula el inverso de 2 + 3i.

21. Calcula el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

a) $-3 + 3i$

b) -3

c) $-3i$

d) $3 - 3i$.

Autor: Jorge Muñoz y Paco Moya
Revisora: Rosa María Herrera
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

22. Expresa en forma polar y trigonométrica los siguientes números complejos:

a) 5i

b) –7i

c) 5 – 5i

d) $\sqrt{3}$ + i.

23. Expresa en forma binómica los siguientes números complejos en forma polar:

a) De módulo 2 y argumento π/3

b) De módulo 3 y argumento –π/4

c) De módulo 1 y argumento π/2

d) De módulo 5 y argumento 2π/3

24. Realiza las siguientes operaciones con números complejos, expresándolos previamente en forma trigonométrica:

a) $(\sqrt{3}+i)^{60}$

b) $(4-4i)^{-11}$

c) $\dfrac{(1-\sqrt{3}\,i)^{12}}{(-2-2i)^{8}}$.

25. Utiliza la fórmula de Moivre para expresar en función de *sen* θ y *cos* θ:

α) *cos* 2θ

β) *sen* 2θ

χ) *cos* 3θ

d) *sen* 3θ.

26. Calcula el argumento principal de los siguientes números complejos:

a) $\dfrac{-3}{\sqrt{3}+i}$ b) $\dfrac{-i}{1-i}$ c) $(1-i\sqrt{3})^{7}$.

Autor: Jorge Muñoz y Paco Moya
Revisora: Rosa María Herrera
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

27. Calcula, representa en el plano complejo y escribe en forma binómica:

a) $\sqrt{-3\text{i}}$

b) $\sqrt{1+\sqrt{3}i}$

c) $\sqrt[3]{-27}$

d) $\sqrt[3]{1-i}$

e) $\sqrt[4]{-81}$.

28. Resuelve las ecuaciones:

a) x^3 = –27.

b) x^4 = –81.

c) x^5 – 32 = 0.

d) x^3 – 8 = 0.

29. Calcula todos los valores de *z* para los que:

a) z^6 + 64 = 0.

b) $(z^2 + 3z - 2)^2 - (2z^2 - z + 1)^2 = 0$.

c) $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

30. Calcula las raíces quintas de la unidad y represéntalas en el plano. Calcula también las raíces quintas de –1, represéntalas también. Generaliza este resultado.

31. Calcula las cuatro raíces de $z^4 + 9 = 0$ y utilízalas para factorizar $z^4 + 9$ en dos polinomios cuadráticos con coeficientes reales.

32. Resuelve la ecuación: $z^2 + 3z - 1 = 0$.

33. Calcula a para que el número complejo $\frac{a+i}{3-i}$ tenga su parte real igual a su parte imaginaria.

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala cuál de los siguientes números es irracional:

a) 6'3333333….. b) 7/3 c) e d) 5'98234234234….

2. La solución de la ecuación $|3x + 9| = 21$ es:

a) $x = 10, x = -4$ b) $x = 10$ c) $x = -10, x = 4$ d) $x = -4$

3. Determina el conjunto A – B si A = [–11, 9]; B = (–1, 6):

a) $[-11, -1) \cup [6, 9]$ b) $[-11, -1) \cup (6, 9]$ c) $[-11, -1] \cup (6, 9]$ d) $[-11, -1] \cup [6, 9]$

4. Calcula $\dfrac{(3+2i)\cdot(3-2i)}{(2+3i)^3}$

a) $-46 + 9i$ b) $62 + 63i$ c) $-46 + 63i$ d) $62 + 9i$

5. Resuelve la ecuación $x^4 = 1$.

a) $x = 1$ b) $x = 1, x = -1$ c) $x = \pm i$ d) $x = \pm 1, x = \pm i$

6. Expresa en forma binómica el siguiente número complejo de módulo 2 y argumento π/3

a) $1 + \sqrt{3}\,i$ b) $\sqrt{3} + i$ c) $1 - \sqrt{3}\,i$ d) $1/2 + \sqrt{3}/2i$

7. Calcula $(1 + i)^6$

a) $\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$ b) -8 c) $1 - i$ d) $-8i$

8. Expresa en forma trigonométrica el siguiente número complejo 5i:

a) $5(cos(\pi/2) + i sen(\pi/2))$ b) $(5, \pi/2)$ c) $5(cos(3\pi/2) + i sen(3\pi/2))$ d) $5(sen(90^o)+i cos(90^o))$

9. Calcula el módulo y el argumento principal del siguiente número complejo –3 + 3i:

a) 18, 135º b) $3\sqrt{2}$, 3π/4 c) $3\sqrt{2}$, 7π/4 d) 3, 5π/4

10. Calcula: $x = \sqrt{-1}$

a) $x = i$ b) $x = -i$ c) $x = i, x = -i$ d) No tiene solución