MATEMÁTICAS: 3º de ESO
Capítulo 8:
Movimientos en el plano y el espacio

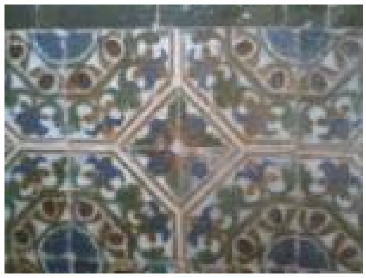
www.apuntesmareaverde.org.es

Autoras: Adela Salvador y María Molero

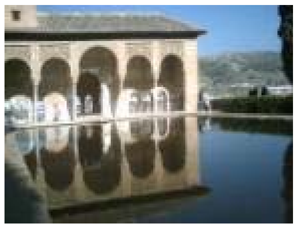
Revisores: Javier Rodrigo y Sergio Hernández

Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

Índice



Resumen



Todo se mueve en el Universo, la Tierra gira alrededor de su eje y se desplaza alrededor del Sol. El Sol se mueve dentro de nuestra galaxia, y la galaxia también se mueve. ¡Mareo me da el pensar a qué velocidad me estoy moviendo! Observa que ni el tamaño ni la forma de los objetos varían con estos movimientos. Estas transformaciones que mantienen la forma y el tamaño son los movimientos o isometrías que estudiaremos en este capítulo.

Analizar lo que nos rodea con ojos matemáticos nos ayuda a comprender más y más cosas. Aprender a mirar las torres, ese reflejo sobre el agua de un palacio de la Alhambra, los mosaicos… o los tapacubos de los coches, los animales y los objetos cotidianos. Todos ellos encierran muchas matemáticas: muchas transformaciones geométricas. Estudiaremos las simetrías, los giros y las traslaciones y las analizaremos en nuestro entorno.

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

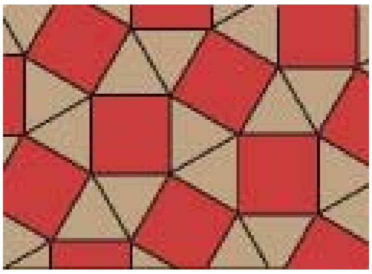
1. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Muchas decoraciones se hacen repitiendo un motivo. En los mosaicos de la Alhambra, en las rejas, en las puntillas y las grecas, en los rosetones de las iglesias… en todas partes puedes ver diseños hechos mediante otro más sencillo. Al observar un edificio puedes ver que en ocasiones está compuesto por algún trozo que se ha ido desplazando, o girando, o hallando el simétrico.

Imagina que estás manipulando un mapa en un móvil con los dos dedos: Puedes desplazarte, girar el mapa, ampliarlo, reducirlo... pero el mapa siempre es básicamente el mismo. Estas manipulaciones son "transformaciones geométricas", porque mantienen las propiedades geométricas más básicas de los objetos: longitudes, ángulos, áreas, volúmenes, o la proporción entre las longitudes, la forma…

1.1. Isometrías

En el mosaico del margen todos los cuadrados son iguales y también son iguales todos los triángulos.



Isometrías

A las transformaciones geométricas que nos llevan de un cuadrado a otro (o de un triángulo a otro) que mantienen la forma y el tamaño las llamamos isometrías o movimientos.

La palabra *isometría* proviene del griego: Iso = Igual. Metría = Medida. Significa por tanto: *Igual medida*.

En el ejemplo del mapa, siempre que no hagas zoom, estarás usando una isometría.

Las **isometrías,** (**movimientos** o **congruencias**) son transformaciones geométricas que conservan ángulos y distancias (aunque no tienen por qué conservar la orientación de los ángulos).

Isometrías en el plano son las **traslaciones**, los **giros** y las **simetrías**.

Actividades propuestas

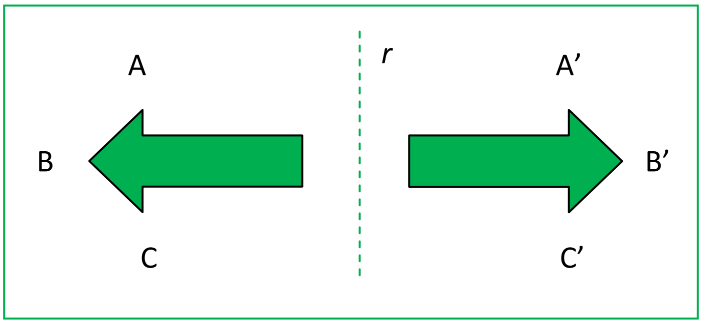
1. En tu cuaderno dibuja un triángulo. Cálcalo y copia la figura calcada de nuevo en tu cuaderno. Mide todos los lados de las figuras homólogas. ¿Miden lo mismo? Mide todos sus ángulos. ¿Miden lo mismo?
2. Dibuja en tu cuaderno una letra B y haz un diseño con ella, trasladándola, girándola o dibujando letras B simétricas.

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

1.2. Isometrías directas e inversas

Actividades resueltas

- En la figura del margen observa que una flecha se transforma en la otra mediante la simetría de eje *r*. El ángulo *ABC*, ¿es igual al ángulo *A’B’C’*? Tienen la misma amplitud, que en ambos es de 90º, pero su orientación es distinta. Mientras que *ABC* gira en el sentido de las agujas del reloj, es decir, tiene sentido negativo, mide –90º, *A’B’C’* gira en el sentido contrario a las agujas del reloj, por lo que su sentido es positivo y mide +90º.

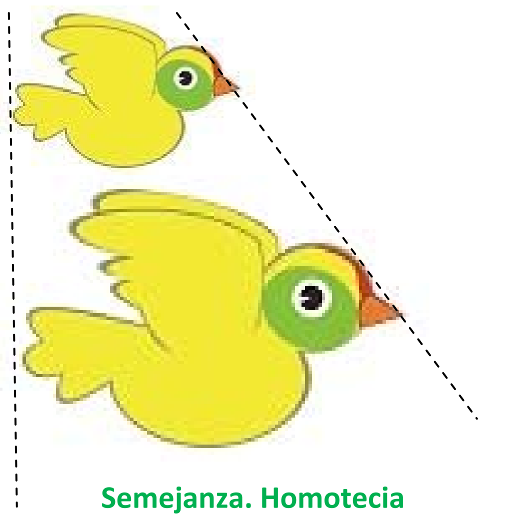


Entre las isometrías hay dos tipos de transformaciones, las que conservan los ángulos (su amplitud y su sentido) que se llaman isometrías **directas**, y las que conservan la amplitud de los ángulos pero cambian su sentido, que se llaman isometrías **inversas**.

- Las traslaciones y los giros en el plano son isometrías directas. Las simetrías son isometrías inversas.
- Tus manos son simétricas. Son iguales. Pero, ¿las puedes superponer? ¿Y tus pies? La simetría es una isometría inversa.
- Imagina el mapa hecho sobre plástico transparente: Si volteas el mapa sobre la mesa, las longitudes y ángulos se mantienen (es una isometría) pero ahora no podrías colocar la ciudad de Valencia de este nuevo mapa, sobre la ciudad de Valencia del mapa original, por más que lo movieras nunca te podrían coincidir. Es una isometría inversa.

Observación:

Unos autores denominan movimientos a las isometrías, y otros estiman que si moviendo las manos nunca vamos a poder superponerlas, las isometrías inversas no deben llamarse movimientos.



Semejanza. Homotecia

1.3. Semejanzas

Si haces zoom en el móvil con los dos dedos en el mapa, las longitudes cambian, así que no es una isometría, pero el mapa sigue siendo el mismo: los ángulos y sus sentidos sí que se conservan, y las proporciones entre las medidas también (la calle que era el doble de larga que otra lo sigue siéndolo). Estos cambios de escala se denominan "semejanzas".

Las figuras del margen son **semejantes**. Es la misma imagen sólo que ampliada. Se mantiene la misma

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

proporción en todas las direcciones. Se mantiene la forma, pero no el mismo tamaño. A estas transformaciones las llamamos **semejanzas**, o si tienen una determinada posición: **homotecias**.

En una semejanza las figuras homólogas tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales.

Ejemplo

- Cuando haces zoom en una foto con el móvil estás haciendo una homotecia. Al poner los dos dedos sobre la pantalla defines dos puntos: el origen *O* seria el punto justo entre tus dos dedos y no se moverá al hacer zoom, y el punto *P* estaría en tu primer dedo. Al mover ese dedo estas definiendo el tercer y último punto *P'* y el móvil amplia la foto para que el punto *O* quede fijo y *P* se estire hasta *P'*. Es una homotecia directa.

Las homotecias tienen un centro de homotecia, *O*, y un punto *P* se transforma por una homotecia en el punto *P'* que está en la recta *OP*, si se verifica que: ***OP'*** = *r*·***OP*** donde *r* es un número llamado **razón de homotecia**.

Actividades propuestas

3. En tu cuaderno dibuja una letra b minúscula, y a continuación otra letra b minúscula el doble de grande. ¿Cómo son sus longitudes y sus ángulos? ¿Es una semejanza?
4. Dibuja ahora una letra d minúscula. ¿Es semejante a la letra b anterior?

1.4. Composición de transformaciones geométricas

Ejemplo:

Observa cómo se ha construido este bello mosaico de la Alhambra:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195378_am_1Alhambra1.swf

Se ha analizado buscando la celda unidad, (un cuadrado formado por cuatro cuadrados) y el motivo mínimo (la mitad de uno de esos cuadrados). En el motivo mínimo, un triángulo rectángulo isósceles, se ha dibujado una sencilla poligonal. Se le han aplicado distintas isometrías: Una simetría de eje la hipotenusa. Al motivo formado por el inicial y su simétrico se le han aplicado cuatro giros de 90º. Se ha vuelto a girar el conjunto. Se ha dado color. Se ha trasladado horizontal y verticalmente.

Cuando aplicamos varias transformaciones, estamos componiendo transformaciones geométricas.

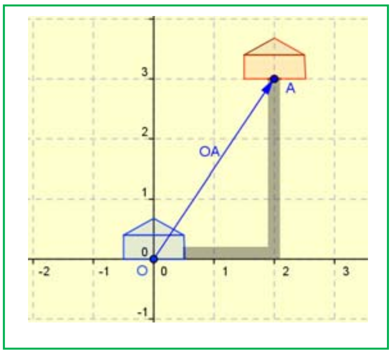
Actividades propuestas

5. En tu cuaderno marca una trama formada por cuadrados de dos cuadraditos de lado. En un cuadradito haz un garabato, una poligonal, una línea curva… Dibuja la simétrica tomando como eje de simetría un lado del cuadrado. Dibuja la figura simétrica del conjunto obtenido tomando como ejes siempre los lados de la trama inicial. Colorea la figura obtenida. Trasládala horizontal y verticalmente.

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

2. TRASLACIONES

2.1. Vectores



Si Susana está en su casa y quiere ir a casa de Nadia, que vive 2 calles al Este y 3 calles al Norte, el trayecto que debe hacer es el que en la figura está dibujado en gris.

Llamamos *"O"* a la posición de la casa de Susana, y *"A"* a la posición de la casa de Nadia. Si Susana tuviera un helicóptero podría ir directamente en línea recta y seguiría la dirección *OA*. Lo representamos con una flecha y se denomina vector fijo.

Un vector fijo ***OA*** es un segmento orientado con origen en el punto *O* y extremo en el punto *A*. Tiene una dirección, la de la recta, un sentido, desde *O* hasta *A*, y una longitud, a la que llamamos módulo.

Un **vector fijo *OA***, de **origen** en *O* y **extremo** en el punto *A*, se caracteriza por:

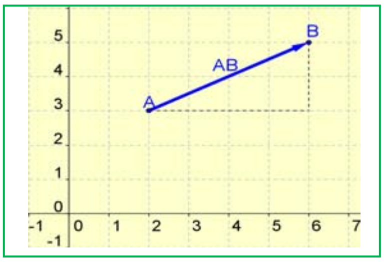
Su **módulo**, que es la longitud del segmento *OA* y que se escribe $|OA|$.

Su **dirección**, que es la recta que contiene al segmento.

Su **sentido** que va desde el origen *O* hasta el extremo *A*.

Las coordenadas o componentes de un vector vienen determinadas por su origen y su extremo.

Ejemplo:



- Si conocemos las coordenadas del punto origen y del punto final podemos calcular las coordenadas del vector. Observa el dibujo del margen y comprueba que si *A* (2, 3) y *B* (6, 5) las coordenadas del vector fijo ***AB*** son ***AB*** = (6 – 2, 5 – 3) = (4, 2).

En general, si *A* (*a, b*) y *B* (*c, d*) entonces ***AB*** = (*c* – *a*, *d* – *b*)

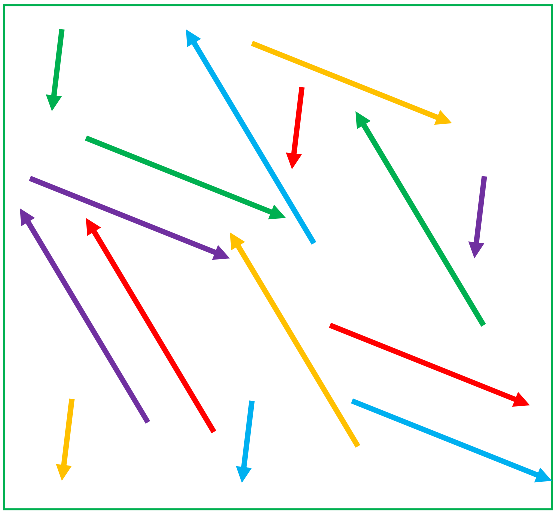
El módulo de un vector se calcula utilizando el Teorema de Pitágoras. Así, el vector de coordenadas ***u*** = (*x*, *y*) tiene de módulo: $|\mathbf{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Actividades propuestas

6. Dibuja en tu cuaderno los puntos de coordenadas *A* (–5, 2), *B* (–1, 6) y *C* (2, –3). Halla las coordenadas de los vectores fijos ***AB***, ***AC***, ***BC***, ***CA*** y ***CB***. Comprueba en tu dibujo que esas son sus coordenadas.
7. El vector fijo ***AB*** tiene de coordenadas (4, 2), calcula las coordenadas de su origen *A* sabiendo que las coordenadas de su extremo *B* son (–1, 1). Represéntalo gráficamente.
8. Las coordenadas de *A* son (2, 3) y las del vector fijo ***AB*** son (4, –2). Calcula las coordenadas del punto *B*. Represéntalo gráficamente.

Todos los segmentos orientados o vectores fijos que tienen el mismo módulo, dirección y sentido, tienen las mismas coordenadas, entonces se dice que son el mismo vector libre, y podemos usarlo en diferentes puntos origen.

Dos vectores fijos son **equipolentes** cuando tienen igual módulo, dirección y sentido, y por lo tanto tienen las mismas coordenadas.

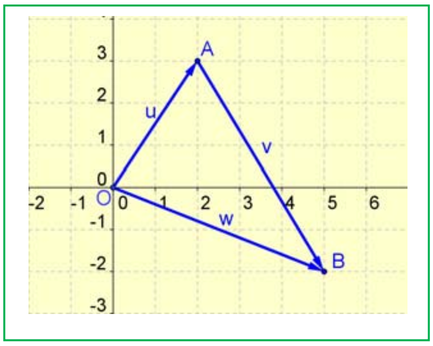


Todos los vectores que son equipolentes se dicen que son un **vector libre**, y cada uno de sus vectores fijos, un **representante** del vector. Al vector libre lo identificamos por sus coordenadas.

Actividades propuestas

9. Nombra a los vectores fijos de la figura e indica cuáles son representantes de un mismo vector libre.
10. Dibuja en tu cuaderno cuatro vectores equipolentes al vector fijo con origen en *A* (–3, 4) y extremo *B* (5, 0), con orígenes en los puntos *C* (0, 3), *D* (5, 2), *E*(–4, 0) y *F* (–2, –5).
11. Dibuja en tu cuaderno los puntos *A* (–2, 2), *B* (–3, 0), *C* (2, 4), *D* (6, 2), *E* (2, 0), *F* (6, –2) y *G* (2, –4). Con los vectores fijos de origen y extremo en dichos puntos, indica cuáles de ellos son equipolentes.
12. Con los puntos del ejercicio anterior, calcula las coordenadas de los vectores fijos ***DE*** y ***FG***. ¿Cómo son? ¿Son dos representantes de un mismo vector libre?

Actividades resueltas



- El vector fijo ***OA*** = ***u*** que indica el trayecto de Susana tiene de coordenadas (2, 3). Si luego Susana quiere desplazarse a casa de otra amiga que está a 3 calles al Este y 5 calles al Sur hará un desplazamiento de vector: ***v*** = (3, –5). En conjunto Susana ha hecho un desplazamiento que es la suma de los dos desplazamientos anteriores. Finalmente está en el punto:

(2, 3) + (3, –5) = (5, –2).

Se encuentra 5 calles al Este y dos calles al Sur de su casa.

Se **suman** dos vectores, sumando sus componentes: **(*a*, *b*) + (*c*, *d*) = (*a* + *b*, *c* + *d*)**

Se multiplica un vector por un número, multiplicando sus componentes: ***r*·(*a*, *b*) = (*r*·*a*, *r*·*b*)**

Actividades propuestas

13. Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia cartesiano y señala en él los puntos de coordenadas: *A* (4, 5), *B* (–5, 6) y *C* (2, –5). a) Llama **u** al vector fijo ***AB*** e indica sus componentes. b) Llama **v** al vector fijo ***BC*** e indica sus componentes. c) Calcula las componentes del vector **w** = **u** + **v**. d) Representa en tu cuaderno a los vectores libres **u** y **v** con origen en el origen de coordenadas y representa también al vector suma **w**. Observa que está sobre la diagonal del paralelogramo construido sobre **u** y **v**.
14. Dibuja en tu cuaderno el punto *A* (1, 2), dibuja ahora el vector **u** = (2, 3) con origen en *A*, y el vector **v** = (4, –1) también con origen en A. Calcula las coordenadas del vector suma **u** + **v**, y dibújalo con origen en *A*. ¿El resultado coincide con lo que has obtenido gráficamente? Observa

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

que el vector suma es la diagonal de un paralelogramo construido sobre **u** y **v**.

15. Efectúa las siguientes operaciones con vectores:

a) $3\cdot\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{2}\cdot(4, 8)$ b) (5, –9) – [(6, 3) + (–4, –6)]

c) 5·[(–1, 0) – (–2, 3)] + (–3)·[(4, –2) –6·(4, –5)] d) 9’3·(2, 6) + (3’7, 5’2)

16. Efectúa las siguientes operaciones con los vectores ***u*** = (–5, 6), ***v*** = (4, –7) y ***w*** = (3, 4):

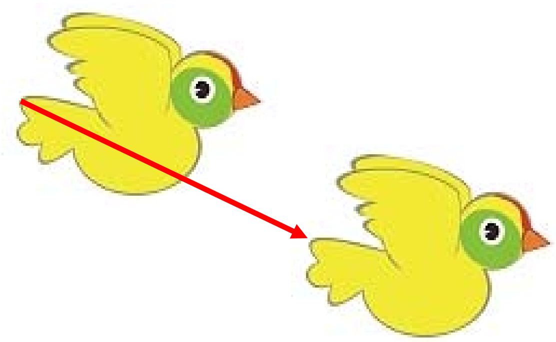
a) 2***u*** – (***v*** + ***w***) b) 3***w*** – 2***u*** + ***v*** c) 2(***u*** + ***v***) – 3***w***

2.2. Traslaciones en el plano

Un coche se mueve por la ciudad desde el domicilio del dueño hasta su trabajo, y se ha trasladado 4 calles hacia el norte y 3 calles hacia el este.

Es posible conocer una **traslación** si sabemos el punto de origen *A* y el de destino *B*. Estos dos puntos, *A* y *B*, determinan el **vector de traslación *AB***. ***AB*** es un vector fijo, representante del vector libre ***u*** de iguales coordenadas.

Una figura y su trasladada.

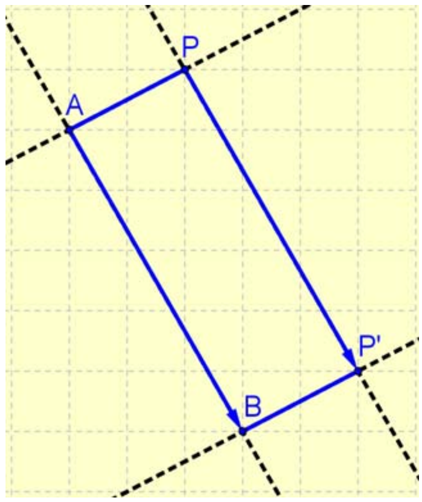


Para definir una **traslación** basta conocer su **vector de traslación**.

Si la traslación de vector libre ***u* = *AB*** transforma un punto del plano *P* en otro *P’*, entonces ***AB*** y ***PP’*** tienen igual módulo, dirección y sentido. Son el mismo vector libre. Tienen las mismas coordenadas.

Si con la traslación de vector ***AB*** trasladamos el punto *P* hasta el punto *P’* entonces *ABP'P* es un **paralelogramo**, y ***AB*** = ***PP’***

Para trasladar una figura se trasladan los puntos que la determinan. Como en una traslación todos los puntos se mueven sobre rectas paralelas y una misma distancia, se puede usar la escuadra y el cartabón para trazar las rectas paralelas y trasladar sobre ella algunos puntos de la figura, para lo que se debe medir siempre la misma distancia sobre la recta.



Propiedades de las traslaciones

Los paralelogramos tienen, como sabes, sus lados iguales dos a dos y paralelos dos a dos.

La recta *AB* es paralela a la recta *PP’*, y la recta *AP* es paralela a la recta *BP’*. Los segmentos *AB* y *PP’* son iguales, lo mismo que *AP* y *BP’*.

Por este motivo, entre una figura y su trasladada **se conservan todas las distancias y todos los ángulos**.

La traslación es una **isometría**, un **movimiento directo**.

Identidad:

La traslación de vector de traslación nulo, **0** = (0, 0) deja todos los puntos invariantes, es decir, no traslada nada, y se denomina también traslación identidad o simplemente: **identidad**.

Puntos invariantes:

Un **punto invariante** es el que se transforma en sí mismo. Una **recta invariante** es la que se transforma en ella misma, aunque sus puntos no sean invariantes. Una **recta invariante de puntos invariantes** es un caso particular de recta invariante en la que cada uno de sus puntos es un punto invariante.

¿Qué puntos deja invariantes una traslación? Observa que salvo la traslación identidad, (que deja todo el plano invariante), una traslación no deja a ningún punto invariante.

Actividades propuestas

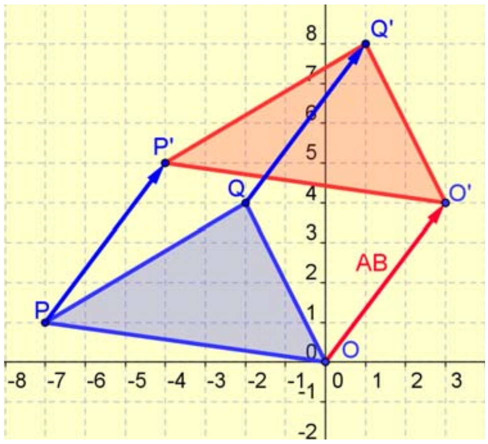
17. Dibuja en tu cuaderno una figura y utiliza escuadra y cartabón para trasladarla 5 centímetros hacia la derecha.
18. Dibuja en tu cuaderno una figura. (Si no se te ocurre ninguna otra, dibuja la letra G). Coloca encima un papel vegetal y cálcala. Desplaza en línea recta el papel vegetal y vuelve a calcar la figura. Las dos figuras que has obtenido, ¿tienen todas sus medidas, tanto longitudes como ángulos, iguales? Traza las rectas que unen pares de puntos correspondientes, ¿cómo son esas rectas? ¿Qué trayectoria han seguido los puntos en el desplazamiento?

Un friso en Camboya

19. Con ayuda de papel cuadriculado transforma mediante una traslación una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.
20. Observa este friso de un templo de Camboya. Es una figura que se repite por traslación. ¿Qué dirección tiene el vector de traslación? ¿De dónde a dónde iría?

2.3. Coordenadas

Para trabajar con traslaciones puedes utilizar las coordenadas:



Actividades resueltas

- A los puntos *P* (–7, 1), *Q* (–2, 4) y *O* (0, 0) se les aplica una traslación de 3 unidades hacia la derecha y 4 unidades hacia arriba de modo que su vector de traslación es:

  AB = (3, 4)

  Entonces las **coordenadas de los puntos trasladados** se obtienen sumando a la abscisa del punto que queremos trasladar la abscisa del vector de traslación, y a la ordenada del punto, la ordenada del vector de traslación:

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

Para trasladar P (–7, 1) según el vector ***AB*** = (3, 4) se calcula –7 + 3 = –4, 1 + 4 = 5, por lo que su punto trasladado es: P' (–4, 5).

Al trasladar Q (–2, 4) se obtiene Q' (–2 + 3, 4 + 4) = (1, 8).

Al trasladar O (0, 0) según el vector ***AB*** = (3, 4) se obtiene O' (3, 4).

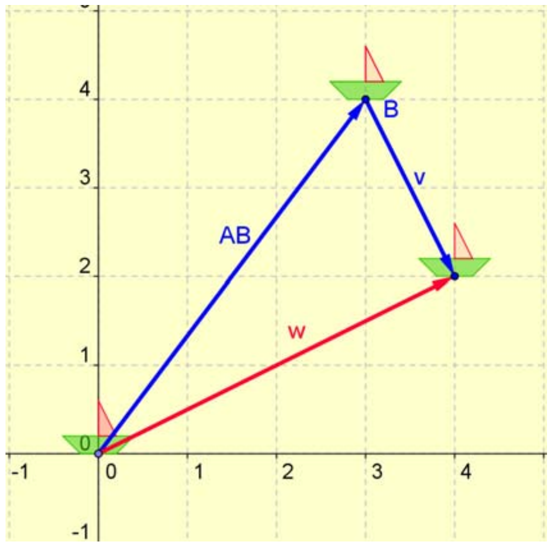
Actividades propuestas

21. Utiliza papel cuadriculado y dibuja en tu cuaderno una letra F de 2 cuadraditos de alta y 1 cuadradito de ancha y aplícale la traslación de vector (2, 5).

22. Dibuja en tu cuaderno unos ejes cartesianos y el triángulo de vértices A (3, 1), B (3, 3) y C (1, 3). Aplícale la traslación de vector (4, 2): 4 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos trasladados A', B' y C'?

2.4. Composición de traslaciones

Si trasladas una figura mediante una traslación de vector **u**, y luego vuelves a trasladarla mediante otra de vector **v**, puedes comprobar que puedes ir de la primera figura a la última mediante una única traslación. El vector de traslación de esta última traslación puedes obtenerlo sumando los vectores de traslación de las dos primeras: **u** + **v**.



Actividades resueltas

- Trasladamos mediante el vector de traslación ***AB*** = (3, 4), y luego mediante el vector de traslación **v** = (1, –2). La composición de ambas traslaciones es otra traslación de vector de traslación **w**:

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{AB} + \mathbf{v} = (3 + 1, 4 - 2) = (4, 2)$$

Actividades propuestas

23. Las puntillas de la imagen se han diseñado a partir de un motivo que se ha ido trasladando a todo lo largo. Dibuja en tu cuaderno un motivo parecido a alguno de la figura, una flor, una V, un zig-zag… y trasládalo componiendo varias traslaciones de un mismo vector de traslación. Has dibujado un friso.

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

Traslación inversa:

Actividades resueltas

- Si hemos trasladado una figura 4 unidades hacia la derecha y 3 hacia arriba, ¿cómo debemos trasladarla para que ocupe la posición inicial? Hay que trasladarla con el vector: (–4, –3).

Decimos que estas traslaciones son la una inversa de la otra.

En general, la **traslación inversa** de la de vector de traslación **v** = (a, b) es la traslación de vector:

$$\mathbf{w} = -\mathbf{v} = (-a, -b)$$

Actividades propuestas

24. Traslada una figura (por ejemplo una letra L) mediante la traslación de vector (–4, 5) y repite el proceso con la figura trasladada empleando el vector (3, –6). ¿Qué movimiento utilizas para ir de la primera figura a la última? ¿Es una traslación? ¿Cuál es su vector?

25. El mosaico del margen está confeccionado utilizando un motivo mínimo que se desplaza por todo el mosaico. Si utilizas como motivo mínimo la estrella de seis puntas, sin tener en cuenta los cambios de color, determina los vectores de traslación de dos traslaciones, una horizontal y otra vertical, que mediante composiciones te permitan tener el resto del mosaico. Observa que al sumar la traslación horizontal con la vertical obtienes traslaciones oblicuas. Dibuja en tu cuaderno una figura y trasládala de forma similar para tener un mosaico.

2.5. Traslaciones en el espacio

Las traslaciones en el espacio tienen las mismas propiedades que las traslaciones en el plano.

Imagina un avión que se mueve. El avión se traslada.

Una traslación en el espacio, igual que una traslación en el plano, es el movimiento que consiste en deslizar un objeto según una dirección. La traslación está determinada por la distancia que se traslada, la dirección de la recta sobre la que se traslada, y por su sentido. Por tanto:

Para determinar una traslación en el espacio basta conocer su **vector de traslación**.

La única diferencia es que ahora el vector de traslación tiene tres componentes: ***AB*** = (a, b, c).

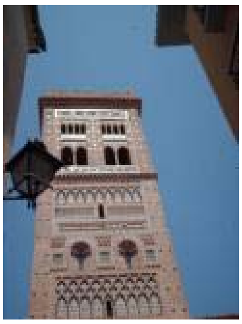
Ejemplo:

- Para trasladar el punto P (2, 4, –1) mediante la traslación de vector ***AB*** = (–3, 5, 2), simplemente sumamos las coordenadas:

$$P' = (2 - 3, 4 + 5, -1 + 2) = (-1, 9, 1).$$

La traslación en el espacio no deja ningún punto invariante.

Actividades propuestas



26. En edificación se utilizan mucho las traslaciones. Piensa en las ventanas de un edificio y elige una. ¿Puedes obtener otra distinta mediante traslación? Haz un dibujo que represente esta situación.
27. En la fachada de esta torre mudéjar de Teruel podemos ver distintas traslaciones. En la parte superior hay dos conjuntos de cuatro ventanitas. Uno es trasladado del otro. Y cada ventanita forma a las otras cuatro mediante una traslación. Al seguir bajando, los dos arcos se trasladan formando otros dos arcos. Observa, en este caso todas las traslaciones tienen un vector de traslación horizontal. Continúa describiendo las traslaciones que ves en el diseño de esta torre.

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

3. GIROS O ROTACIONES

3.1. Giros en el plano

Son las 4 en punto. Si retrasamos el reloj 15 minutos, la manecilla de los minutos ha girado un ángulo de 90º en sentido positivo.

Para determinar un **giro** o **rotación** es necesario conocer un punto, *O*, el **centro de giro**; un **ángulo** α y el **sentido** de giro de ese ángulo.

Existe el acuerdo de considerar *positivo* (+) al sentido contrario de las agujas de un reloj y sentido *negativo* (–) el de las agujas del reloj.

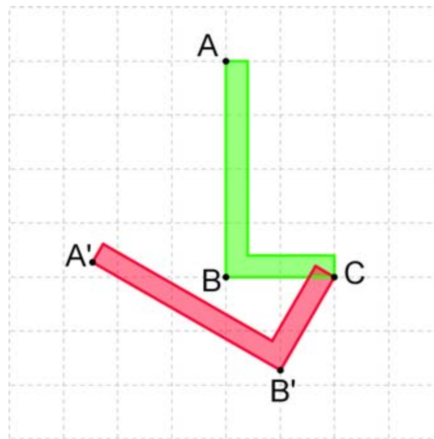
Si *A'* es el punto girado de *A*, con centro *O* y ángulo α, entonces: $|OA| = |OA'|$ y el segmento *OA* forma un ángulo α con *OA'*.

Para girar una figura se giran los puntos que la forman.

Ejemplo:

- Si han pasado 15 minutos la manecilla de los minutos ha girado –90º (90º en sentido negativo), cuando pase media hora habrá girado –180º, y si sólo pasan 10 minutos habrá girado –60º.

Actividades resueltas

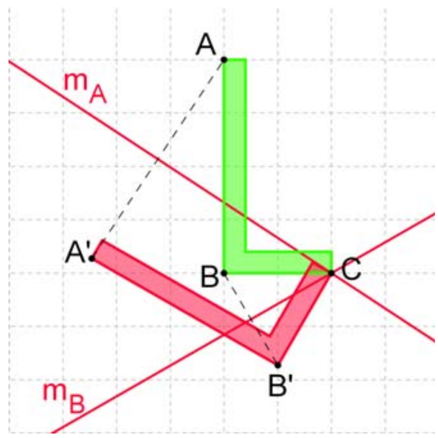


Para dibujar rotaciones en el cuaderno puedes utilizar un transportador de ángulos y un compás.

- Para girar la letra L según un giro de centro *C* y ángulo 60º, tomamos varios puntos de la figura, en este caso los puntos *A*, *B* y *C*. Con el compás haciendo centro en *C* trazamos arcos, y sobre ellos, utilizando el transportador, medimos 60º. Obtenemos los puntos *B'* y *A'*.

La nueva letra L mantiene las distancias: *BC* = *B'C* y *AB* = *A'B'*. También mantiene los ángulos: el ángulo *ABC* es recto, y el nuevo ángulo *A'B'C* también es un ángulo recto y con la misma orientación que el anterior. En general:

Los giros mantienen las distancias, por lo que son **isometrías** o movimientos. Mantienen los ángulos y el sentido de los ángulos, por lo que son **movimientos directos**.



Para saber si dos figuras son dos figuras giradas trazamos las mediatrices de los puntos correspondientes y todas ellas deben cortarse en un mismo punto, el centro de giro. Con el trasportador de ángulos podemos entonces medir el ángulo de giro.

Actividades resueltas

- Trazamos el segmento *BB'* y su mediatriz. Trazamos el segmento *AA'* y su mediatriz. Ambas mediatrices se cortan en el punto *C*, que es el centro de giro. El ángulo que forman las mediatrices es de 60º.

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

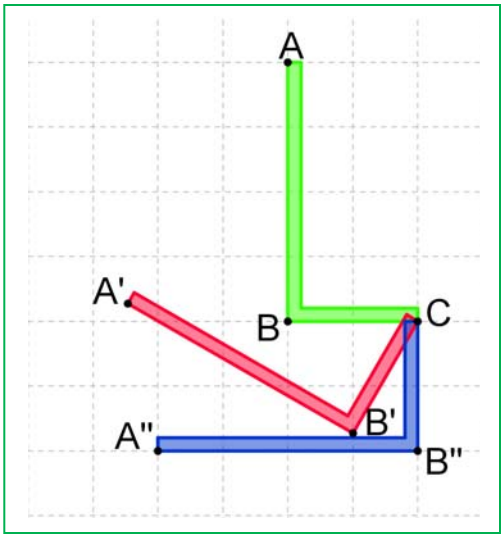
Actividades propuestas

28. Dibuja en tu cuaderno un punto *O* y otro punto distinto *A*. Gira al punto *A* con centro en *O* un ángulo de 30º en sentido positivo y denomina *A'* el punto girado.
29. Dibuja en tu cuaderno un punto *O* y dos segmentos, uno *OA* que pase por *O*, y otro *BC* que no pase por *O*. Dibuja los segmentos girados *OA'* y *B'C'* del giro de centro *O* y ángulo 60º.
30. Dibuja en tu cuaderno el triángulo de vértices *A* (4, 2), *B* (3, –2) y *C* (5, 0). Dibuja el triángulo que se obtiene al girarlo con centro en el origen de coordenadas un ángulo de 90º en sentido positivo. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices *A'*, *B'* y *C'* del triángulo girado?
31. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante un giro, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.

3.2. Composición de giros. Elementos invariantes.

Ejemplo:

- Si giramos la letra L con centro *C*, 60º en sentido positivo y luego, también con centro *C*, 30º en sentido positivo, la figura obtenida está girada respecto a la primera 90º con el mismo centro de giro. En general:



La **composición** de dos giros del mismo centro es otro giro del mismo centro y de ángulo, la suma de los ángulos de giro.

- Si una vez girada nuestra letra L 30º en sentido positivo, la giramos, con el mismo centro de giro, 30º en sentido negativo, ¿qué ocurre? En efecto, hemos vuelto a la posición inicial. Se dicen que son giros inversos y que al componerlos tenemos la identidad, ya que no nos movemos.

Un giro de centro *O* y ángulo α es el **giro inverso** al giro del mismo centro *O* y ángulo $-\alpha$.

Observa que la composición de giros de distinto centro no es conmutativa, pues depende del orden en que hagamos los giros.

Actividades resueltas

- Pensemos ahora en qué elementos deja invariantes un giro de centro *O* y ángulo de giro que no sea 0º ni 180º. ¿Deja alguna recta invariante? ¿Hay alguna recta del plano que no se mueva? No, todas giran. No hay rectas invariantes. ¿Y puntos? ¿Algún punto del plano no se mueve al girar? Si, el centro de giro queda invariante. El centro de giro se transforma en sí mismo.

En un giro de centro *O* y ángulo distinto de 0º y de 180º, el único elemento **invariante** es un punto, el **centro de giro.**

Centro de giro: Centro de giro es un punto de una figura plana tal que al girar un cierto ángulo, la figura coincide consigo misma.

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

Observa que el rosetón del centro de este mosaico tiene un **centro de giro** de 60º. Si lo giramos 60º, vuelve a coincidir. También si lo giramos 120º o 180º o 240º o 300º.

3.3. Simetría central en el plano. Centro de simetría

La simetría central de centro *O* en el plano es un giro de ese centro *O* y ángulo 180º. En el plano, la simetría central es, por tanto, un movimiento que ya conocemos. Observa que la simetría central es, por tanto, un movimiento directo.

Si *P'* es el simétrico de *P* en la **simetría central** de centro de simetría *O*, entonces, *O* es el punto medio del segmento *PP'*.

Actividades resueltas

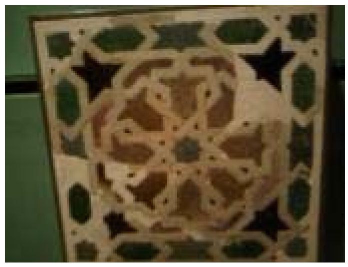
- Dos puntos *P* y *P'* son **simétricos respecto del origen de coordenadas** si tanto sus abscisas como sus ordenadas son opuestas. Así, el simétrico respecto del origen del punto (–2, 4) es el punto (2, –4).
- Observa con esta animación cómo se construye el simétrico, respecto a una simetría central de centro (2, 3), de un polígono:

  http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/183284_am_1.swf

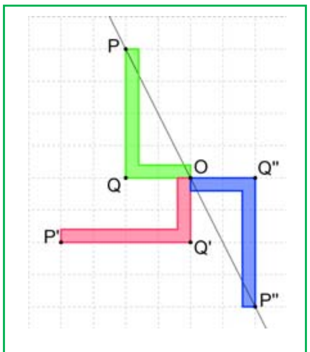
  El simétrico del punto *A* (8, 1) es el punto *A'* (–4, 5). Has visto que se ha trazado la recta *OA*. Con centro en *O* y radio *OA* se traza una arco de circunferencia que corta a la recta *OA* en *A'*. Lo mismo para obtener el simétrico de los otros vértices del polígono. Si los otros vértices son *B* (12, 7), *C* (9, 10), *D* (5, 8) y *E* (7, 6), ¿cuáles son sus simétricos respecto a la simetría central de centro (2, 3)?
- ¿Qué elementos deja invariantes una simetría central? Deja invariante el centro de simetría y todas las rectas que pasan por el centro de giro.

Centro de simetría: Un punto *O* es un centro de simetría de una figura si todo punto de ella tiene como transformado por la simetría central de centro *O*, otro punto de la figura. La simetría central transforma la figura en ella misma.

Ejemplo:



- El mosaico de la Alhambra del margen tiene simetría central.
- El círculo, el cuadrado, el rectángulo tienen centro de simetría, sin embargo, un triángulo nunca tiene centro de simetría.
- Los polígonos regulares con un número par de lados tienen centro de simetría.
- El pentágono regular, no lo tiene.



Actividades resueltas

- Aplicamos a la letra L un giro de 90º y luego otro giro también de 90º. La composición de un giro de 90º, con otro del mismo centro y 90º, es un giro de 180º. El punto *P* primero se transforma en *P'* y luego en P''. Si unimos cada punto de la figura con su transformado por la composición de los dos giros, la recta *OP* se transforma en la *OP''*, que es la misma recta. Los puntos *Q*, O y *Q''* también están alineados. Las rectas que pasan por el centro de simetría son invariantes.

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

Actividades propuestas

32. Dibuja en tu cuaderno dos puntos cualesquiera *P* y *P'*. Encuentra su centro de simetría.
33. ¿Qué ocurre al aplicar un giro de 60º a una figura? ¿Hay rectas invariantes? ¿Y en un giro de 180º? Las rectas que pasan por el centro de giro, ¿en qué rectas se transforman? ¿Y con un giro de 0º? ¿Y con un giro de 360º?
34. Dibuja un triángulo *ABC* y su simétrico *A'B'C'* respecto un punto *O*. ¿Cómo son sus lados? ¿Son iguales? ¿Y sus ángulos? ¿Se mantiene el sentido de los ángulos? Comprueba cómo es el ángulo *ABC* y el ángulo *A'B'C'*. ¿Es un movimiento directo?
35. Vamos a analizar las letras mayúsculas. Indica cuáles de las siguientes letras no tienen simetría central y cuáles si la tienen, indicando entonces su centro de simetría: B, H, N, O, P, S, T, X, Z. Recuerda, buscas un punto tal que la simetría central de centro ese punto deje invariante a la letra.

3.4. Giros en el espacio

Al abrir o cerrar una puerta, ésta gira, las patillas de las gafas giran, las ruedas de un coche giran... Observa que para determinar un giro en el espacio necesitas, además del ángulo (y su sentido), conocer el **eje de giro**. Recuerda, en el plano teníamos un centro de giro, un punto, ahora un eje de giro, una recta.

Piensa en otros ejemplos cotidianos de giros en el espacio.

Cuando giras una puerta, ¿cambia el sentido de sus ángulos? Naturalmente que no. Los giros en el espacio son movimientos directos.

- ¿Qué puntos se transforman en sí mismos? El giro en el espacio deja invariantes a los puntos del eje de giro.

Eje de giro: Eje de giro de una figura, en el espacio, es una recta imaginaria tal, que al girar la figura un cierto ángulo, coincide consigo misma.

3.5. Simetría central en el espacio. Centro de simetría

Una figura tiene simetría central si al unir cada uno de sus puntos con el centro se obtiene otro punto de la figura.

Si *P'* es el simétrico de *P* en la **simetría central** de centro *O*, entonces, *O* es el punto medio del segmento *PP'*.

La simetría central en el espacio no es un giro. Además solo deja un punto invariante, el centro (no una recta)

Centro de simetría: Un punto *O* es un centro de simetría de una figura si todo punto de ella tiene como transformado por la simetría central de centro *O*, otro punto de la figura.

Ejemplos:

- La esfera, el cubo tienen centro de simetría, el tetraedro, no.
- El cilindro tiene centro de simetría. El cono no tiene centro de simetría.
- Un prisma regular tiene centro de simetría. Una pirámide, no.

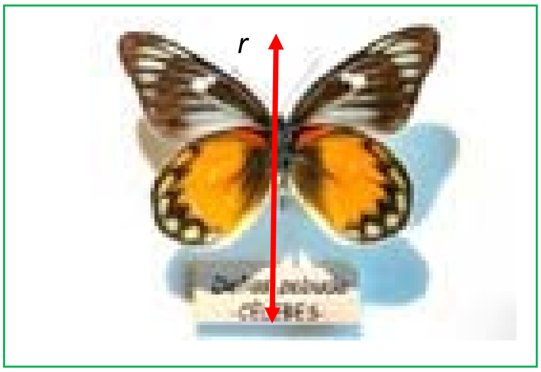
Actividades propuestas

36. Escribe cinco ejemplos de objetos del espacio que giren.
37. Mediante un giro en el espacio, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

4. SIMETRÍAS

4.1. Simetrías axiales. Eje de simetría



La mariposa de la figura es simétrica respecto del eje de simetría *r*.

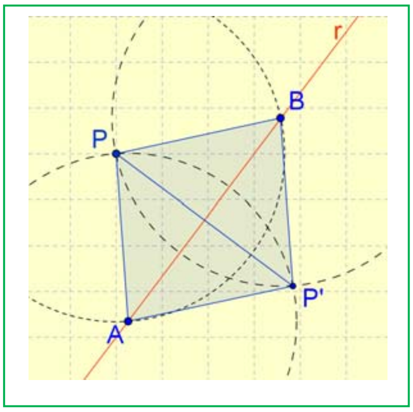
Para determinar una simetría (simetría axial) es necesario conocer el **eje de simetría**.

Si *P'* es el simétrico de *P* respecto de la **simetría axial** de eje *r*, entonces *r* es la **mediatriz** del segmento *PP'*.

La simetría axial conserva todas las longitudes y la magnitud de los ángulos, pero cambia el sentido de estos. Por eso no es posible hacer coincidir una figura con su simétrica (a no ser que las propias figuras sean simétricas).

La simetría es por tanto un movimiento inverso.

Actividades resueltas



- Para hallar el simétrico del punto *P* respecto del eje de simetría *r*, utiliza un compás y haciendo centro en *P* con radio suficientemente grande traza un arco de circunferencia que corte a *r* en dos puntos, *A* y *B*. Sin variar de radio y con centro en *A* y en *B* traza otros dos arcos que se cortan en *P'*, simétrico de *P* respecto a *r*. Observa que *PAP'B* es un rombo pues sus cuatro lados son iguales, por lo que sabemos que sus diagonales son perpendiculares y se cortan en el punto medio.
- En la animación puedes ver como se dibuja el punto simétrico de otro utilizando regla y escuadra:

  http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/183282_am_1Punto_simetrico.swf

  Tenemos el eje de simetría y queremos encontrar el simétrico del punto *P* (4, 1). Dibujamos el punto *P* (4, 1) en un sistema de coordenadas y tomamos la escuadra. Apoyamos la escuadra sobre el eje de simetría y hasta que toque al punto. Trazamos una recta auxiliar, perpendicular al eje y que pase por el punto *P*. Medimos la distancia del punto al eje y llevamos esa longitud sobre la recta auxiliar, y ya tenemos el punto simétrico.

  - También puedes obtener figuras simétricas doblando un papel. El doblez es el eje de simetría. Si dibujas una figura, doblas el papel y la calcas obtienes la figura simétrica.
  - Otra forma es doblar un papel y recortar una figura: se obtiene una figura simétrica respecto al doblez.

Si dibujamos en papel cuadriculado el triángulo de vértices *A* (–3, 2), *B* (–5, 4) y *C* (–4, 7) y hallamos el simétrico respecto al eje de ordenadas, las coordenadas de los vértices del triángulo simétrico son: *A'*(3,2), *B'* (5, 4) y *C'* (4, 7). En general, el simétrico de *P* (*x*, *y*) respecto al eje de ordenadas es *P'* (–*x*, *y*).

Si dibujas el triángulo simétrico de *ABC* respecto al eje de abscisas, observa que las coordenadas de sus vértices son: A' (–3, –2), B' (–5, –4) y C' (–4, –7). En general, el punto simétrico de *P* (*x*, *y*) respecto al eje de abscisas es *P'* (*x*, –*y*).

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

Dos puntos **simétricos respecto del eje de ordenadas** tienen la misma ordenada y sus abscisas son opuestas. Dos puntos **simétricos respecto del eje de abscisas** tienen la misma abscisa y sus ordenadas son opuestas.

Puntos invariantes:

En una simetría, los puntos del eje de simetría se transforman en sí mismos.

La simetría axial deja invariantes los puntos del eje de simetría. El eje de simetría es una recta invariante de puntos invariantes.

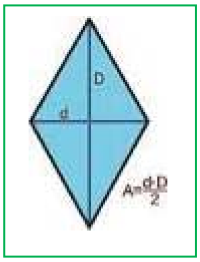
- ¿Qué otros elementos deja invariantes? ¿Hay más puntos? ¿Hay otras rectas? Observa que las rectas perpendiculares al eje de simetría se transforman en sí mismas.

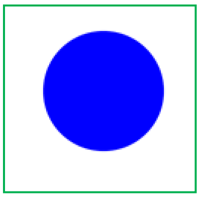
Actividades propuestas

38. Dibuja en tu cuaderno un eje *r* de simetría oblicuo, y un punto *P*. Dibuja el punto P' simétrico respecto de *r*. Comprueba que la recta *r* es la mediatriz del segmento *PP'.* (*Recuerda*: La mediatriz de un segmento es la perpendicular por el punto medio).
39. Dibuja en tu cuaderno dos puntos cualesquiera *P* y *P'*. Dibuja el eje de simetría *r* respecto al que son simétricos.
40. Dibuja en papel cuadriculado una letra L y un eje de simetría vertical. Dibuja la letra L simétrica respecto a ese eje. Calca una de ellas, y mueve el papel de calco para intentar hacerlas coincidir. Es imposible, porque la simetría es un movimiento inverso.
41. Reproduce en tu cuaderno la figura del margen. Dibuja un eje de simetría oblicuo y dibuja la figura simétrica.

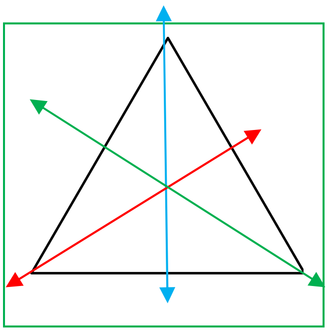
42. Halla las coordenadas de los vértices del triángulo simétrico respecto del eje de ordenadas del triángulo *A* (3, –4), *B* (5, 6), *C* (–4, 5). Lo mismo respecto del eje de abscisas.

Eje de simetría de una figura:





Si la recta *r* es un eje de simetría de una figura entonces todo punto de esa figura tiene como transformado por la simetría de eje *r* a otro punto de dicha figura.



Ejemplos:

- Un triángulo isósceles tiene un eje de simetría y un triángulo equilátero, tres.
- Un rectángulo o un rombo tienen dos ejes de simetría, y un cuadrado cuatro.
- Un círculo tiene una infinidad de ejes de simetría (todos sus diámetros).

Actividades propuestas

43. Indica cuáles de las siguientes letras mayúsculas son simétricas, y si lo son, indica si sus ejes de

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

simetría son horizontales o verticales: A, B, D, F, K, M, N, R, T, U, V, W, Z.

44. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante una simetría, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza la respuesta.

45. Dibuja un rectángulo *ABCD*. Dibuja el eje de simetría que transforma *AB* en *CD*, y el eje de simetría que transforma *AD* en *BC*.

46. Dibuja un hexágono regular y dibuja sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Tiene 6. Descríbelos.

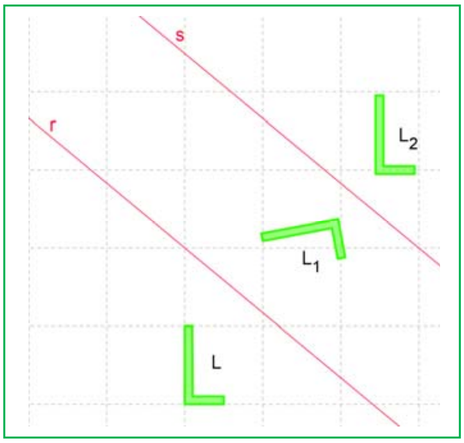
47. Dibuja un pentágono regular y sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Descríbelos.

4.2. Composición de simetrías

Vamos a estudiar ahora la composición de simetrías. Ya sabes que una simetría es un movimiento inverso. Si cambias el sentido de un ángulo y luego lo vuelves a cambiar, te queda el sentido original. Por tanto la composición de dos simetrías no va a ser un movimiento inverso sino uno directo.

Veámoslo primero en un caso particular.

Actividades resueltas

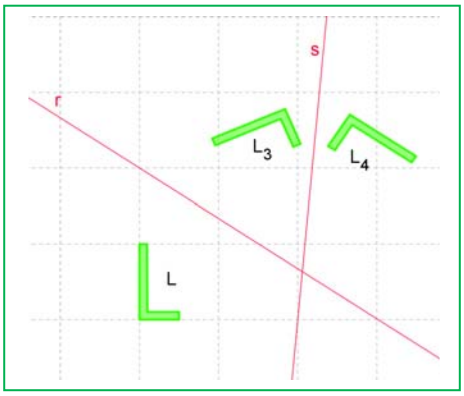


- Trazamos dos ejes de simetría, *r* y *s*, paralelos. Dibujamos una letra L, y dibujamos la letra L_1 simétrica de L con respecto de la recta *r*, y después la letra L_2 simétrica de L_1 respecto de la recta *s*. ¿Mediante qué transformación pasamos directamente de L a L_2? ¿Puede ser una simetría? (Observa que sí se pueden superponer L y L_2, luego es un movimiento directo). ¿Es un giro? ¿Es una traslación? Si, es una traslación, ¿de qué vector?

La composición de dos simetrías de ejes paralelos es una traslación. Es la traslación de vector de dirección la recta ortogonal a los ejes de simetría, de módulo el doble de la distancia entre ambos ejes, y de sentido el que va del primer eje al segundo.

La composición de simetrías **no es conmutativa**. Comprueba que si a L primero le aplicamos la simetría de eje *s* y luego la simetría de eje *r* obtenemos una traslación, pero el vector de traslación es el opuesto al del caso anterior.

- Trazamos ahora dos ejes de simetría secantes, *r* y *s*, y una letra L. Dibujamos la letra L_3 simétrica de L con respecto a la recta *r*, y dibujamos la letra L_4 simétrica de L_3 respecto a la recta *s*. ¿Mediante qué transformación pasamos directamente de L a L_4? ¿Puede ser una simetría? (Observa que se pueden superponer L y L_4, luego es un movimiento directo). ¿Es una traslación? ¿Es un giro? Si, es un giro, ¿de qué centro y de qué ángulo?



La composición de dos simetrías de ejes secantes es un giro. Es el giro de centro el punto de intersección de los ejes de simetría, de ángulo doble al que forman ambos ejes y de sentido del ángulo, el que va del primer eje al segundo.

La composición de simetrías **no es conmutativa**. Comprueba que si a L primero le aplicamos la simetría

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

de eje *s* y luego la simetría de eje *r* obtenemos un giro, pero el ángulo de giro es el opuesto al del caso anterior.

Actividades propuestas

48. Reproduce en tu cuaderno la figura P del margen.

a) Dibuja el pájaro P' simétrico respecto al eje de ordenadas.

c) Dibuja el pájaro P'' simétrico respecto al eje de abscisas.

d) ¿Existe alguna simetría axial que trasforme P' en P''? ¿Existe alguna simetría central que transforme P' en P''?

e) Si el pico del pájaro P tuviera unas coordenadas (–2, 5), ¿qué coordenadas tendría el pico del pájaro P'? ¿Y el del pájaro P''?

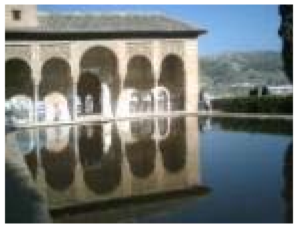
49. Dibuja en tu cuaderno dos ejes de simetría paralelos y una letra F. Dibuja la composición de ambas simetrías a dicha letra, comprobando que la composición de ellas es una traslación y determina el vector de traslación.

50. Dibuja en tu cuaderno dos ejes de simetría secantes y una letra F. Dibuja la composición de ambas simetrías a dicha letra, comprobando que la composición de ellas es un giro y determina el centro y el ángulo de giro.

51. Si aplicamos una simetría a una figura, ¿qué transformación debemos aplicarle para obtener la figura inicial?

52. La composición de dos simetrías planas de ejes secantes es un giro. ¿Cómo deben ser los ejes para que sea un giro de 180 º (o una simetría central)?

4.3. Simetría especular en el espacio. Plano de simetría



Muchos muebles son simétricos: muchas mesas, muchas sillas… Muchos animales son casi simétricos. Los coches, los aviones, los trenes son simétricos. Si nos miramos en un espejo vemos una imagen reflejada que es simétrica a la nuestra. Muchos edificios son casi simétricos o tienen elementos de simetría.

Para determinar una simetría en el espacio es necesario conocer un plano, el **plano de simetría**.

Una simetría en el espacio deja invariantes los puntos pertenecientes al plano de simetría. Deja invariante las rectas ortogonales al plano de simetría, y deja invariante al plano de simetría.

Plano de simetría: El plano de simetría de una figura es un plano imaginario tal, que todo punto de la figura se transforma por la simetría respecto de ese plano en otro punto de dicha figura.

La torre con la puerta del margen tiene un plano de simetría.

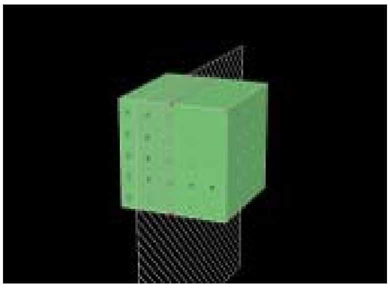
Un plano de simetría es como un espejo que refleja exactamente un fragmento de la figura en el otro fragmento.

Actividades resueltas

Construye poliedros regulares, con cartulina, con pajitas, con …, para comprobar lo que sigue:

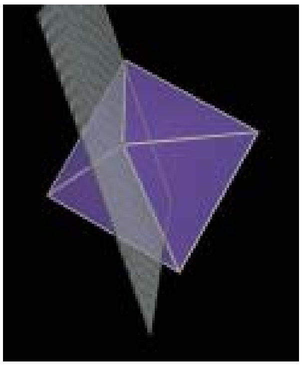
Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

- Analizamos el plano de simetría del cubo de la ilustración del margen. Vemos que pasa por los puntos medios de las aristas. ¿Cuántos planos de simetría hay similares a este? Como el cubo tiene 12 aristas y cada plano pasa por 4 hay 3 de este tipo. Otro plano de simetría pasa por una diagonal de una cara, una arista, otra diagonal y otra arista. ¿Cuántos hay de ese otro tipo? Como el cubo tiene 12 aristas y tomamos 2, hay 6 de ese tipo.



- Busca un eje de giro del cubo. Observa que tiene un eje de giro de 90º que va de centro de cara a centro de cara. ¿Cuántos ejes de giro tiene de ese tipo? Comprueba que hay 3 (6 caras : 2 = 3). Observa que también hay un eje de giro de 120º que va de vértice a vértice opuesto. ¿Cuántos hay de ese otro tipo? Como el cubo tiene 8 vértices hay 4 de este tipo. Observa que también hay un eje de giro de 180º que va de centro de arista a centro de arista opuesta. ¿Cuántos hay de ese otro tipo? Como el cubo tiene 12 aristas, hay 6 de ese tipo. ¿Hay simetría central? Observa que sí.

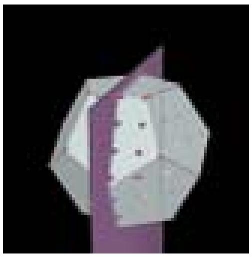
- Vamos a analizar ahora las isometrías de un octaedro. Observa que tiene centro de simetría, igual que el cubo. Planos de simetría: Hay planos, como el de la figura, que pasan por cuatro aristas. Como tiene 12 aristas hay 3 de este tipo. También hay planos que pasan por el eje de simetría de las caras. ¿Cuántos hay? ¿Tenemos el mismo número de planos de simetría que en el cubo? Sí. El cubo y el octaedro son duales. Si en el cubo fijamos los centros de las caras y los unimos, tenemos un octaedro. Y si en el octaedro unimos los centros de las caras, tenemos un cubo. Observa que el número de caras de un cubo, 6, coincide con el número de vértices de un octaedro, y que el número de caras de un octaedro, 8, coincide con el número de vértices del cubo. Y ambos tienen el mismo número de aristas, 12.



- Buscamos ahora ejes de giro en un octaedro. ¿Tiene ejes de giro de 90º? Si, van de vértice a vértice opuesto. Hay 6 vértices, luego hay 3 ejes de giro de este tipo. ¿Hay ejes de giro de 120º, como en el cubo? Naturalmente, van de centro de cara a centro de cara, y como tiene 8 caras, hay 4 de este tipo. ¿Y los ejes de giro de 180º? Van, como en el cubo, de centro de arista a centro de arista, y hay 6.

- El estudio de tetraedro es más sencillo. Comprueba que NO tiene centro de simetría. Los planos de simetría pasan por una arista, el eje de simetría de una cara y el eje de simetría de otra. Hay 6 aristas, luego hay 6 de este tipo. Tiene ejes de giro de 120º. Pasan por un vértice y el centro de la cara opuesta. Como tiene 4 caras hay 4 de este tipo.

- El estudio del dodecaedro y del icosaedro es más complicado. Observa que también son duales. Si unimos los centros de las caras de un dodecaedro se obtiene un icosaedro, y si unimos los centros de las caras de un icosaedro, se obtiene un dodecaedro. El dodecaedro tiene 12 caras y el icosaedro 12 vértices. El icosaedro tiene 20 caras y el dodecaedro 20 vértices. Ambos tienen 30 aristas. Vamos a describir el plano de simetría del dodecaedro de la figura del margen: Vemos que pasa por los dos ejes de simetría de dos caras, por una arista. ¿Y luego? ¿Ya no lo vemos? Observa que vuelve a pasar por dos ejes de simetría de caras y por otra arista. Como el dodecaedro tiene 20 aristas, hay 10 planos de simetría de este tipo.



Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

Actividades propuestas

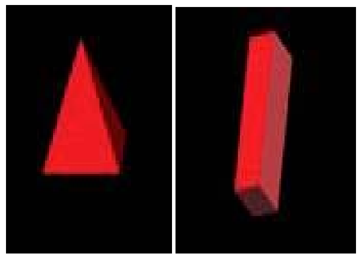
53. Escribe cinco objetos que estén a tu alrededor que sean simétricos e indica su plano de simetría. Mira en el aula y busca simetrías. ¿Son simétricas las sillas, la lámpara, la ventana, las mesas...? ¿Cuál es su plano de simetría?

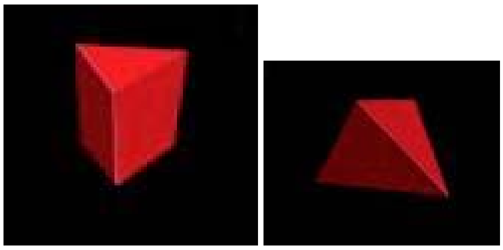
54. Define los planos de simetría y los ejes de rotación de las siguientes figuras:

a) Un prisma recto de base cuadrada. ¿Y si es oblicuo?

b) Una pirámide recta de base cuadrada.

c) Si el prisma y la pirámide son rectos, pero sus bases son rectángulos, ¿qué simetrías se mantienen?





55. Determina los planos de simetría y los ejes de rotación de estas figuras:

a) Un prisma recto cuya base es un triángulo equilátero.

b) Una pirámide recta de base un triangulo equilátero. ¿Y si es oblicua?

c) Si el prisma y la pirámide son rectos pero de base un triángulo isósceles, ¿qué simetrías se mantienen?

56. Mediante una simetría especular, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

4.4. Isometrías en el plano

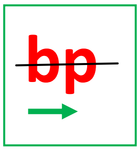
Las **isometrías** son trasformaciones geométricas que conservan las distancias y los ángulos.

En el plano hemos estudiado las traslaciones, los giros y las simetrías (axiales) que son isometrías.

Ya sabemos que la simetría central en el plano coincide con un caso particular de giro, el giro de 180º.

Los giros y las traslaciones son isometrías directas, pues no cambian el sentido de los ángulos. Las simetrías son isometrías inversas pues sí los cambian.

Hemos visto que la composición de dos traslaciones es siempre otra traslación, que la composición de dos giros del mismo centro es otro giro de igual centro, que la composición de dos simetrías es un giro o una traslación. Podríamos seguir estudiando qué ocurre si componemos giros de distinto centro, giros con traslaciones, traslaciones con simetrías y simetrías con giros. Veríamos que casi siempre obteníamos una simetría, una traslación o un giro. Salvo cuando componemos una traslación con una simetría. Obtenemos una isometría nueva que llamaremos **simetría con deslizamiento**. Pasamos de la letra b del margen a la letra p por una simetría de eje horizontal (en negro) y una traslación (de vector de traslación en verde).



Puntos invariantes: La traslación no deja ningún punto invariante. Los giros dejan uno, el centro de giro, y la simetría axial deja una recta, el eje de simetría. La simetría con deslizamiento tampoco deja ningún punto invariante.

Si en un plano una isometría deja tres puntos invariantes no alineados, entonces deja invariante todo el plano, luego es la identidad.

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

En el plano			
	Puntos invariantes	**Rectas de puntos invariantes**	**Rectas invariantes**
Traslación	Ninguno	Ninguna	Las de dirección igual a la del vector de traslación
Giros (de ángulo de giro distinto a 180º y 0º)	Centro de giro	Ninguna	Ninguna
Simetría (axial)	Los del eje de simetría	El eje de simetría	El eje de simetría y las rectas ortogonales al eje de simetría.
Identidad	Todo el plano	Todas	Todas
Simetría con deslizamiento	Ninguno	Ninguna	Las de dirección igual al vector de traslación y del eje de simetría.

4.5. Isometrías en el espacio

En el espacio hemos estudiado las traslaciones, los giros, las simetrías centrales y las simetrías (especulares). La simetría central es un movimiento nuevo diferente de los giros.

En el espacio, traslaciones y giros son isometrías directas, y simetrías especulares y simetrías centrales son isometrías inversas.

No hemos estudiado su composición, pero no nos costaría nada ver que la composición de dos traslaciones es otra traslación, de vector, la suma de los vectores de traslación. La composición de dos giros del mismo eje es otro giro del mismo eje y de ángulo, la suma de los ángulos. La composición de dos simetrías de planos paralelos es una traslación, y la composición de dos simetrías de planos secantes es un giro de eje, la recta de intersección de los planos. La composición de dos simetrías centrales del mismo centro es la identidad. El comportamiento de estas composiciones es similar a lo que ocurre en el plano.

Más complicado es estudiar en el espacio la composición de giros de distinto eje, giros con simetrías, simetrías con traslaciones y traslaciones con giros en el espacio. Igual que en el plano aparecieron nuevas isometrías, la simetría con deslizamiento, ahora también nos aparecen nuevas isometrías: simetría rotativa, simetría con deslizamiento…

Puntos invariantes: La **traslación** no deja **ningún** punto invariante. La **simetría central** deja **un** punto invariante, el centro. Los **giros** dejan una **recta**, el eje de giro. La **simetría** especular deja un **plano** de puntos invariantes, el plano de simetría. Y si una isometría en el espacio deja cuatro puntos invariantes no coplanarios, es la identidad.

5. Mosaicos, frisos y rosetones

Al pasear por una ciudad o por el campo puedes ver montones de transformaciones geométricas: verás simetrías, giros y traslaciones por doquier, formando mosaicos, frisos o rosetones; o bien en las formas de las flores

5.1. Mosaicos

57. Mira este azulejo de un mosaico de Estambul. La celda unidad es cada uno de los azulejos con la que se construye todo el mosaico mediante traslaciones. Indica los vectores de traslación. Pero puedes reducir el motivo mínimo. ¿Utilizando giros? ¿Utilizando simetrías? Mira la ampliación: Comprueba que puedes utilizar como motivo mínimo la octava parte del azulejo.

Realiza la misma observación con los otros dos azulejos de Estambul siguientes:

58. **Análisis de mosaicos de la Alhambra**: Observa el mosaico del margen. Imagina que es infinito, que completa todo el plano. Puedes tomar como motivo mínimo un par de hojitas. Para pasar de un par de hojitas al otro par adyacente, ¿qué trasformación has utilizado? ¿Es una simetría? ¿Es un giro? ¿Hay centros de giro de 60º? ¿Y de 80º? ¿Y de 30º?

Utiliza una trama de triángulos, o dibuja una en tu cuaderno, para diseñar un mosaico parecido a este. Marca en la trama los centros de giros de 60º, de 180º y de 30º. Dibuja un motivo mínimo sencillito, por ejemplo una poligonal o una hoja, y muévelo usando esas transformaciones.

59. Analiza la animación de generación de un mosaico mediante giros y traslaciones, analiza la animación:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/185487_am_1_Alhambra_3.swf

Observa cómo primero dibuja una trama de cuadrados, dibuja un motivo mínimo formado por dos segmentos, luego le aplica isometrías a ese motivo: giros de 90º, con los que dibuja la estrella, que por simetría completa la celda unidad a la que por último la traslada por todo el mosaico.

60. También puedes ver en la siguiente animación:

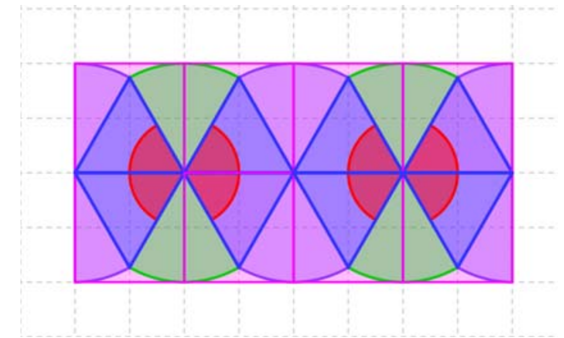
http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195377_am_1Alhambra2.swf

como se realiza un estudio del **mosaico** del margen, buscando la celda unidad, el motivo mínimo y estudiando sus giros (de 90º y 180º) y sus ejes de simetría.

Utiliza una trama de cuadrados, o dibuja una en tu cuaderno, para diseñar un mosaico parecido a este. Marca en la trama los centros de giros de 90º y de 180º. Marca los ejes de simetría. Dibuja un motivo mínimo sencillito, por ejemplo una poligonal, y muévelo usando esas transformaciones. Completa primero la celda unidad, y luego trasládala.

5.2. Frisos

Las puntillas, las grecas de los bordados, las telas estampadas, las rejas... utilizan muy a menudo las traslaciones en sus diseños. Son los frisos.



Observa el friso del margen. Como todos los frisos se obtiene trasladando un motivo. Pero pueden tener otras isometrías además de la traslación. La combinación de traslación, simetrías y giros permiten obtener siete tipos de frisos diferentes.

61. Hemos formado frisos utilizando las letras del alfabeto. Todos ellos se forman por traslación. Pero en ocasiones hay otras isometrías. A) ¿En cuáles hay una simetría de eje horizontal. B) ¿En cuáles hay giros de 180º. C) ¿En cuáles hay simetrías de eje vertical? D) ¿Hay simetrías con deslizamiento? E) Señala todas las familias de simetrías respecto a un eje, de giros y de traslaciones por las cuales un punto del friso se transforma en otro punto del mismo (supuesto que se prolongue hasta el infinito).

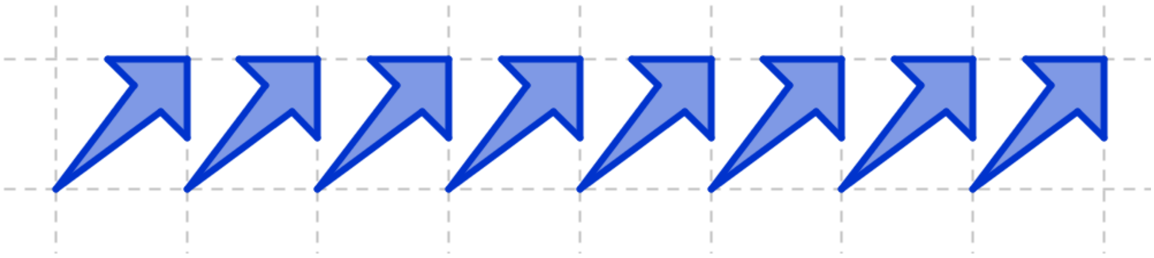
L1. LLLLL, L2. NNNNN, L3. VVVVV, L4. CCCCC, L5. HHHHH, L6. pbpbpb, L7. pqdbpqdbp

62. Sal a la calle o en tu casa y busca frisos. Fotografía rejas, mira puntillas y grecas… y haz un estudio de los diferentes frisos que encuentres. Dibuja en tu cuaderno su diseño e intenta clasificarlos según el esquema de las letras del problema anterior, según las transformaciones que utilicen. Para ello hazte las siguientes preguntas: 1) ¿Tiene giros? Si la respuesta es NO, entonces: 2) ¿Tiene simetría horizontal? Si la respuesta es SI, es un L4, que como el friso formado por la letra C o la letra D, no tiene giros y si, simetría de eje horizontal. Si la respuesta es NO, entonces: 3) ¿Tiene simetría vertical? Si la respuesta es SI, es un L3, como el friso formado por la

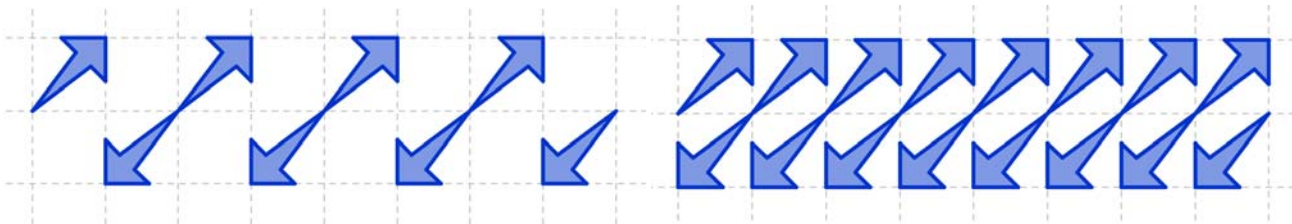
Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

letra V o la letra A, que no tiene ni giros, ni simetría horizontal y si simetría vertical. Si la respuesta es NO, entonces: 4) ¿Tiene simetría con deslizamiento? Si lo tiene es un L6, y si no es un L1. Pero si tiene giros puede tener también simetría horizontal y es un L5, o tener simetría con deslizamiento y ser un L7, o sólo tener el giro y ser un L2, como el friso formado por la letra N o la letra S.

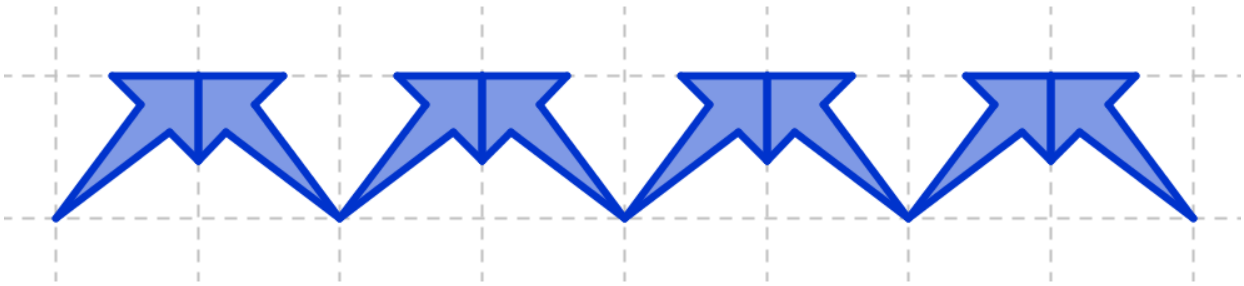
63. En los frisos siguientes señala todas las familias de simetrías respecto a un eje, de giros y de traslaciones por las cuales un punto del friso se transforma en otro punto del mismo (supuesto que se prolongue hasta el infinito).



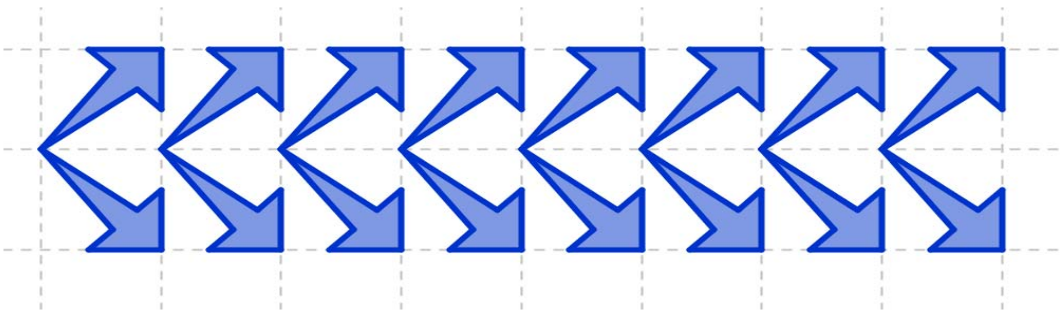
Friso L1: Sólo traslación



Frisos L2: Giros de 180º

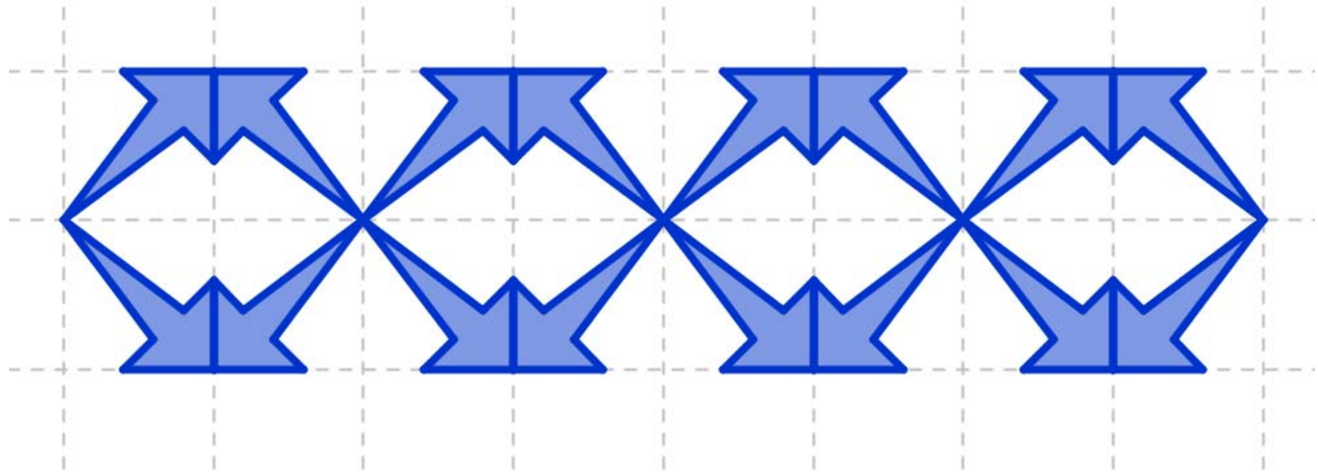


Friso L3: Simetría vertical

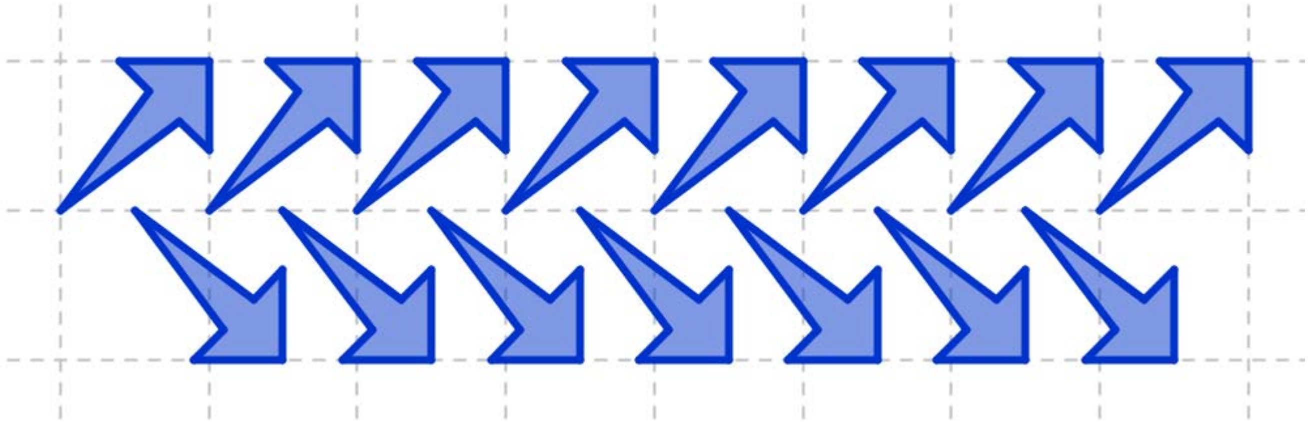


Friso L4: Simetría horizontal

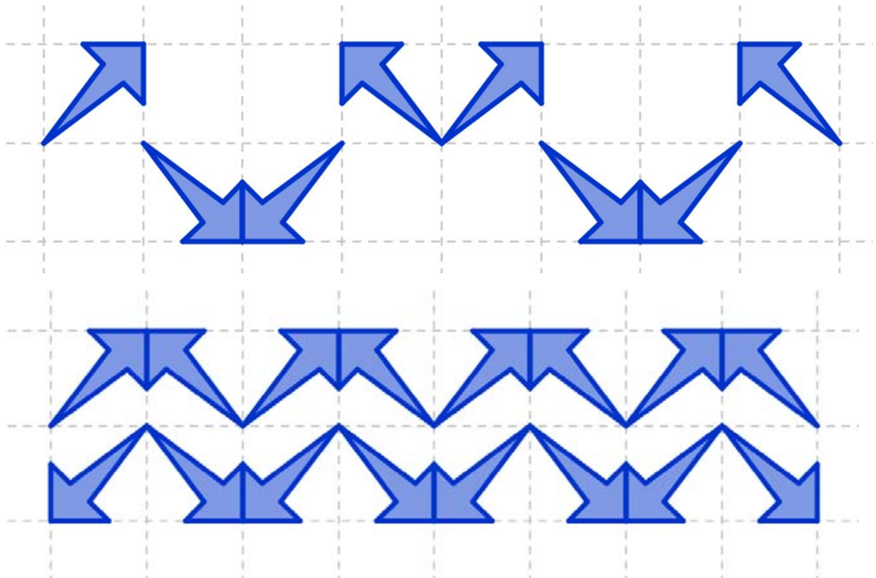
Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador



Friso L5: Giros, simetrías verticales y simetrías horizontales



Friso L6: Simetría con deslizamiento



Frisos L7: Simetría con deslizamiento y simetría vertical.

5.3. Rosetones

Los rosetones de las catedrales son espectaculares, pero también se pueden ver en situaciones más cotidianas, como los tapacubos de los coches.

Se denominan grupos de Leonardo a los grupos de isometrías de estos rosetones. Pueden tener simetrías o únicamente giros. Este rosetón de una catedral tiene ejes de simetría y divide la circunferencia en 12 trozos iguales. Decimos que es un D12. Si no hay simetrías, sólo giros decimos que es un C5, o un C6… según divida a la circunferencia en 5 o en 6… partes iguales.

Por ejemplo, ¿te has fijado en los tapacubos de los coches? En ocasiones tienen diseños interesantes. Hemos recogido fotografías de algunos tapacubos para que los estudies.

64. **Análisis de tapacubos:** Observa los siguientes tapacubos. Indica, para cada uno de ellos, las siguientes cuestiones:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

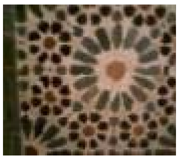
a) Tiene simetría central.

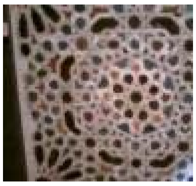
b) Tiene ejes de simetría axial. ¿Cuántos?

c) Tiene centro de giro, ¿cuál es el menor ángulo de giro que lo deja invariante?

d) Sal a la calle y fotografía o dibuja los tapacubos que veas y te parezcan interesantes. Haz un estudio de ellos.

CURIOSIDADES. REVISTA

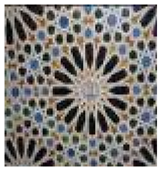


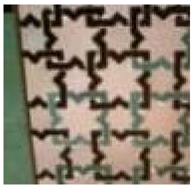


Mosaicos de la Alhambra

Como sabes los árabes de España eran grandes matemáticos y en los mosaicos de la Alhambra demuestran, además de su sentido artístico, sus conocimientos de Matemáticas. Se ha demostrado que, partiendo de un motivo mínimo, y aplicándole giros, simetrías, traslaciones… sólo hay 17 formas distintas de completar el plano haciendo un mosaico. Es sorprendente que esas 17 formas ya se encuentren en los mosaicos de la Alhambra.





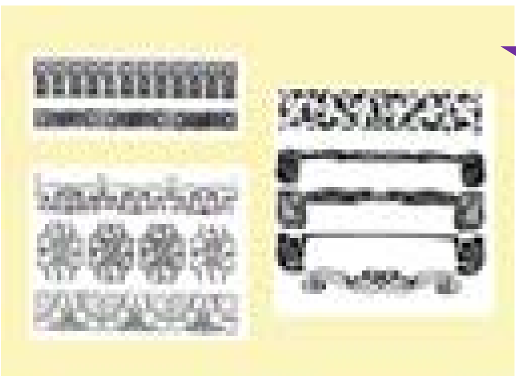
Puedes ver la generación de uno de estos mosaicos de la Alhambra mediante simetrías:

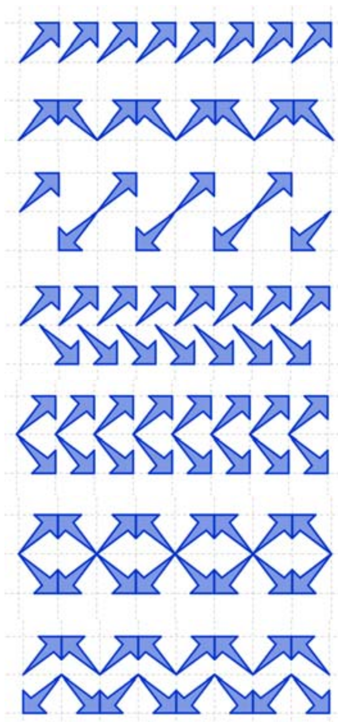
http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195375_am_1.swf

Busca "mosaicos" en Internet, y sabrás más sobre la generación de mosaicos.

Frisos

Las cenefas, puntillas…, en las rejas, en… podemos ver diseños que se repiten a lo largo de una línea por traslación. Se ha demostrado que sólo hay 7 formas distintas de hacer esos diseños utilizando, además de las traslaciones, giros y simetrías.



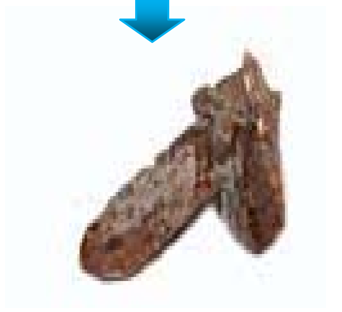


Puedes ver la generación de un friso: (http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195415_am_1Friso.swf)

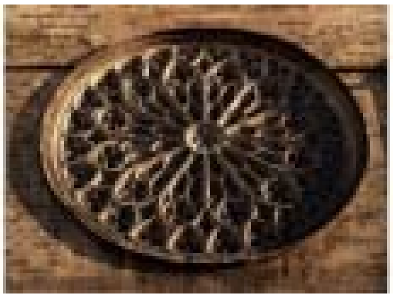
Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

Cristales

Igual que en el plano sólo existen 17 posibles diseños de mosaicos, en el espacio existen 230 posibles tipos de diseños cristalográficos que compacten el espacio.

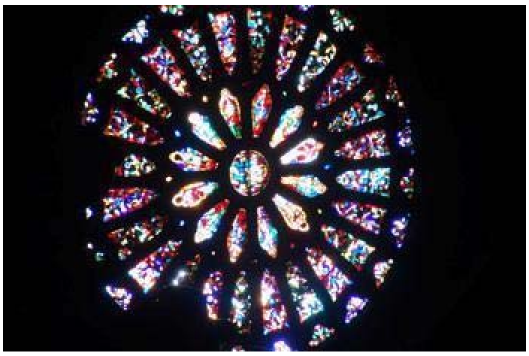


Para ser matemático hay que ser poeta. *Sonya Kovalevkaya.*



Rosetones

Giros y simetrías pasando todos por un centro. Así se diseñan los rosetones. Si sólo hay giros se llaman C_n, siendo C_2 si sólo tiene un giro de 180º, C_3 si lo tiene de 120º… El tapacubos de abaj es, por tanto, un C_5. Y si tiene simetrías, se llaman D_n como los rosetones que vemos que son D_{12} o D_{16}. Busca en Internet "grupos de Leonardo" y verás más cosas sobre ellos

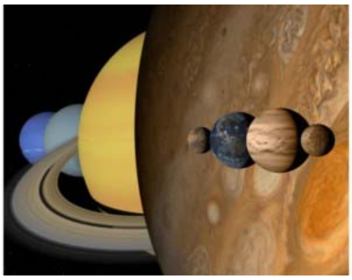


Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

Todo se mueve.

Te mueves no sólo cuando andas o vas en coche. Cuando estás quieto también te mueves. Todo se mueve en el Universo. La Tierra gira alrededor de su eje. El radio de la Tierra es de 6.400 km, por lo que la longitud del Ecuador terrestre es de $2\pi r$ = 40.192 km. Tarda 24 horas en dar una vuelta, luego 40192/24 = 1674,67, por lo que si estuvieras en el Ecuador estarías moviéndote a una velocidad aproximada de 1.675 km/h.

La Tierra gira alrededor del Sol. Tarda aproximadamente 365 días en dar una vuelta completa. Ahora viajamos a 107.000 km/h girando alrededor del Sol.



Planetas del Sistema Solar

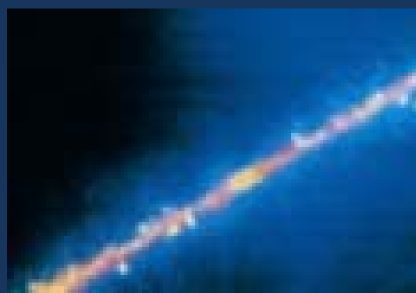


Imagen en infrarrojos del centro de la Vía Láctea

El Sol se mueve dentro de nuestra galaxia, donde también gira a una velocidad de 810.000 km/h alrededor el centro de la galaxia. El Sol está a 27.000 años luz del centro de nuestra galaxia y tarda 200 millones de años en dar una vuelta.

Galaxia Andrómeda

Nuestra galaxia, la Vía Láctea, también se mueve. Se aproxima a la Galaxia Andrómeda a una velocidad de 230.000 km/h.

¡Mareo me da el pensar a qué velocidad me estoy moviendo!

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

RESUMEN

		Ejemplos
Semejanza	Transformación geométrica que conserva los ángulos y las distancias son proporcionales.	Un fotocopia reducida
Traslación	Viene determinada por su vector de traslación. Son isometrías directas. La composición de dos traslaciones es una traslación.	El trasladado del punto *P* (1, 2) por la traslación de vector **v** = (4, 5) es *P'* (5, 7).
Giro o rotación en el plano **Giro en el espacio**	Viene determinado por el centro de giro y el ángulo de giro. Viene determinado por el eje de giro y el ángulo	El girado del punto *P* (1, 2) por el giro de centro el origen y ángulo 90º es *P'* (2, –1)
Simetría axial **Simetría especular**	Se conoce por su eje de simetría Se conoce por su plano de simetría	El simétrico del punto *P* (1, 2) por la simetría de eje el eje de ordenadas es *P'* (–1, 2)
Isometrías	Son trasformaciones geométricas que conservan las distancias y los ángulos.	Traslaciones, giros y simetrías
Composición de isometrías	La composición de dos isometrías directas es una isometría directa. La composición de dos isometrías inversas es una isometría directa. La composición de una isometría directa con una inversa es una isometría inversa.	
Composición de isometrías en el plano	La composición de dos giros del mismo centro es un giro del mismo centro. La composición de dos simetrías es un giro o una traslación.	
Elementos invariantes en el plano	La **traslación** no deja **ningún** punto invariante. El **giro** deja invariante **un** punto, el centro de giro. La **simetría** deja invariante una **recta**, el eje de simetría La **identidad** deja invariante **todo** el plano.	
Elementos invariantes en el espacio	La **traslación** no deja **ningún** punto invariante. La **simetría central** deja invariante **un** único punto, el centro de simetría. El **giro** deja invariante una **recta**, el eje de giro. La **simetría** deja invariante el **plano** de simetría La **identidad** deja invariante **todo** el espacio.	

Un buen resumen de este capítulo lo tienes en esta presentación en Power Point:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Mosaicosyfrisos.pdf

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

MATERIALES PARA EL AULA

Presentaciones:

- Un buen resumen de este capítulo lo tienes en esta presentación en Power Point:

  http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Mosaicosyfrisos.pdf

- Algunas presentaciones de Power Point:

  - Sobre frisos y mosaicos

  http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Movimientosenelplano.pdf

  - Frisos y mosaicos en la web: En Pensamiento Matemático:

  http://innovacioneducativa.upm.es/sandbox/pensamiento/chip_geometrico/geometria_y_arte.pdf

- Trabajos realizados por estudiantes que pueden servir de modelo para que, ahora ellos, realicen otros similares:

- Frisos y rejas unidos por las Matemáticas.
  http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/rejas.pdf

Presentación confeccionado por dos alumnas de 2º de bachillerato del Instituto Salvador Victoria de Monreal del Campo de Teruel: Pilar Lorente Lorente y Paloma Plumed Martín. Es un trabajo interesante sobre frisos y rejas, aunque, opinamos, que algún friso no está correctamente clasificado. Sin embargo es un magnífico modelo para inspirar otros trabajos de salir a la calle y fotografiar o dibujar rejas, (o mosaicos, o otros tipos de frisos) que se vayan viendo.

- Power Point que recoge trabajos sobre mosaicos de diferentes alumnos de la Universidad Politécnica de Madrid. Puede también servir de inspiración para proponer al alumnado que confeccione sus propios mosaicos.
  http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Mosaico.pdf

Internet

- Buscando en internet hemos encontrado, bajo el título de los 17 grupos de simetría en el plano, la siguiente entrada: http://www.acorral.es/index3.htm. Son prácticas con Geogebra sobre mosaicos, frisos y celosías. Están diseñados, con diseños vistosos y originales mosaicos con los 17 grupos. Al final hay una tabla, a modo de resumen, que permite identificar y clasificar cada grupo de simetría. También hay una hoja de trabajo para el alumnado.
- También en Internet, en http://www.xtal.iqfr.csic.es/Cristalografia y en particular en:
  http://www.xtal.iqfr.csic.es/Cristalografia/parte_03.html
  un trabajo sobre los grupos de autosimetría de los cristales sumamente interesante y de un nivel muy alto. Existe 32 clases de redes cristalinas: triclínico, monoclínico, tetragonal, cúbico, hexagonal… Estudia que sólo 11 tienen centro de simetría. Al analizar cuáles son compatibles con la traslación se obtienen las redes (o redes de Bravais) de las que hay 11 redes. Combinando los 32 grupos cristalográficos con las 11 redes encuentra que hay 230 formas posibles de repetir un objeto finito (motivo mínimo) en el espacio de dimensión tres.

Libros:

La Alhambra. Trabajo monográfico editado por la Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía, en 1987, que recoge trabajos de diversos autores, que permite aprender mucho más sobre transformaciones geométricas y los grupos de autosimetría en el plano. Editado por la revista “Epsilón”.

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Traslación

1. Dibuja en tu cuaderno un paralelogramo sobre un sistema de referencia y una cuadrícula. Tienes cuatro segmentos orientados. Determina las coordenadas de los vectores sobre dichos segmentos. ¿Cuáles tienen las mismas coordenadas?

2. Tenemos los puntos *A* (0, 5), *B* (3, 6), *C* (4, -2) y *D* (7, 3). Calcula las coordenadas de los vectores ***AB***; ***AC***; ***AD***; ***BC***; ***BD***; ***CD***; ***DC***; ***BA***.

3. Determina el vector de traslación que traslada el punto *A* (3, 7) al punto *A'* (1, 5).

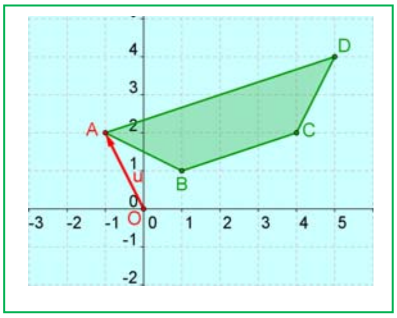
4. Por la traslación de vector **u** = (2, 8) se traslada el punto *A* (9, 4) al punto *A'*. ¿Cuáles son las coordenadas de *A'*?

5. Por la traslación de vector **u** = (–3, –1) se traslada el punto *A* al punto *A'* (3, 3). ¿Cuáles son las coordenadas de *A*?

6. Trasladamos la circunferencia de centro *C* (5, 2) y radio 3 unidades con la traslación de vector **u** = (–5, –2). Determina el centro y el radio de la circunferencia trasladada.

7. Dibuja en tu cuaderno unos ejes coordenados y en ellos un cuadrado de lado 2 unidades al que llamas *C*, le aplicas una traslación según el vector ***u*** = (4, 1) y llamas *C*' a su trasladado. Ahora aplicas a *C'* una traslación según el vector ***v*** = (–2, 4). La isometría que transforma *C* en *C*'', ¿es una traslación? Escribe las coordenadas de su vector. Mediante esa traslación, ¿en qué punto se transforma el origen de coordenadas?

8. El vértice inferior izquierdo de un cuadrado es A (3, 1) y el vértice superior izquierdo es B (1, 3). Le aplicas una traslación de vector ***u*** = (–2, 4), ¿cuáles son las coordenadas de los cuatro vértices del cuadrado transformado?



9. Dibuja la imagen que resulta de aplicar al trapecio de la figura la traslación de vector ***OA*** = (–1, 2). Determina las coordenadas de los puntos transformados de *A* (–1, 2), *B* (1, 1), *C* (4, 2) y *D* (5, 4) por dicha traslación.

10. Aplica la traslación de vector ***u*** = (–3, 4) al triángulo *ABC* de vértices *A* (3, 1), *B* (4, 4), *C* (6, 5), y calcula las coordenadas del triángulo transformado.

11. Dibuja en tu cuaderno un círculo de centro el origen y radio 2 unidades.

a) Trasládalo con la traslación de vector **u** = (3, 0).

b) Trasládalo después mediante la traslación de vector **v** = (0, 4).

c) Indica las coordenadas del centro del segundo círculo trasladado.

d) Indica las coordenadas del trasladado del punto (0, 2) al aplicarle cada una de las dos traslaciones.

12. Trasladamos el triángulo *ABC* de vértices *A* (6, 1), *B* (–3, 4) y *C* (0, 8), mediante la traslación de vector **u** = (7, 1), y luego mediante la traslación de vector **v** = (2, 8). Determina las coordenadas del triángulo transformado analítica y gráficamente.

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

13. La composición de dos traslaciones tiene por vector (5, 9). Si una de ellas es la traslación de vector **u** = (7, 3), ¿qué componentes tiene el otro vector de traslación?

14. a) Dibuja en tu cuaderno un triángulo *ABC* y trasládalo 5 cm a la derecha. Denomina *A'B'C'* al triángulo obtenido.

b) Traslada *A'B'C'* ahora 4 cm hacia arriba y denomina *A''B''C''* al nuevo triángulo.

c) Dibuja el vector que permite pasar directamente del triángulo *ABC* al *A''B''C''* y mide su longitud. ¿Cuáles son sus coordenadas?

15. Determina el vector de traslación de la traslación inversa a la de vector ***u*** = (–2, 5).

16. a) Dibuja en tu cuaderno una figura, y repite el dibujo trasladando la figura 4 veces con la misma traslación. Al hacerlo, dibujarás un friso.

b) Un friso confeccionado con letras L es: L L L L L. Dibuja un friso confeccionado con letras J. Otro confeccionado con letras M. Además de traslación, ¿tiene simetrías?

c) Busca un friso. Mira las rejas de tu calle, un bordado o una puntilla, las grecas de unos azulejos… y dibuja su diseño en tu cuaderno.

17. Mediante una traslación en el espacio, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

Giros

18. Dibuja en tu cuaderno el punto *A* (5, 4). Indica las coordenadas del punto *A'* que se obtiene al girar 180º y con centro el origen el punto *A*. Indica las coordenadas del punto *A''* obtenido al girar *A'* 90º con el mismo centro de giro.

19. Dibuja una figura en tu cuaderno, cálcala, recórtala y pégala inclinada al lado de la inicial. Las dos figuras, ¿tienen todas las longitudes iguales?, ¿y sus ángulos? Determina, con compás y transportador, el centro y el ángulo de giro.

20. Dibuja en tu cuaderno una letra F y la letra F girada 30º con centro de giro su punto más inferior.

21. Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo isósceles y con centro en el vértice de uno de los ángulos agudos aplícale un giro de 45º en sentido positivo. Luego aplícale otro giro de 45º, y así sucesivamente hasta llegar al triángulo inicial. ¿Qué giros has estado haciendo?

22. Dibuja en tu cuaderno un círculo de centro *O*, dos diámetros perpendiculares *AB* y *CD* y una cuerda *CB*. Sobre el mismo dibujo traza las figuras obtenidas haciendo girar la figura formada por los dos diámetros y la cuerda, con giros de centro *O* y ángulos 45º, 90º, 135º, 180º, 225º, 270º y 315º. Habrás hecho la composición de giros de 45º varias veces.

23. ¿La letra H tiene centro de simetría? Indica tres objetos cotidianos que tengan simetría central.

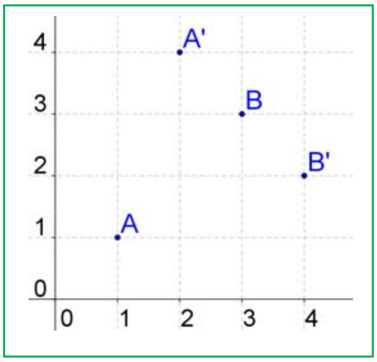
24. Sobre unos ejes cartesianos representa los puntos *A* (2, 6), *B* (–2, 5), *C* (5, 3) y sus simétricos respecto al origen *A'*, *B'* y *C'*. ¿Qué coordenadas tienen *A'*, *B'* y *C'*?

25. Dibuja en tu cuaderno el triángulo de vértices *A* (3, 7), *B* (5, –5) y *C* (7, 2). Dibuja el triángulo que se obtiene al girarlo con centro en el punto *D* (8, 8) un ángulo de 180º. Es una simetría central. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices *A'*, *B'* y *C'* del nuevo triángulo?

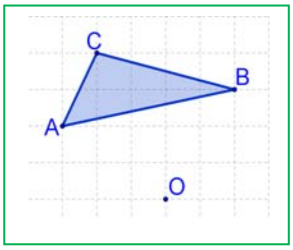
26. Dibuja en un sistema de referencia un punto *P* y su simétrico *P'* respecto del origen. Si las coordenadas de *P* son (x, y), ¿cuáles son las de *P'*?

27. Dado el triángulo *A*(3, –4), *B* (5, 6), *C* (–4, 5), halla las coordenadas de los vértices del triángulo simétrico respecto del origen.

28. Dibuja un triángulo equilátero *ABC* y con centro en el vértice *A* aplícale un giro de ángulo 60º. El triángulo dado y el transformado, ¿qué figura forman? Vuelve a aplicar al triángulo trasformado el mismo giro de centro *A*, ¿qué giros has estado haciendo? ¿Cuántos giros debes aplicar al triángulo inicial para que vuelva a ocupar la posición inicial?



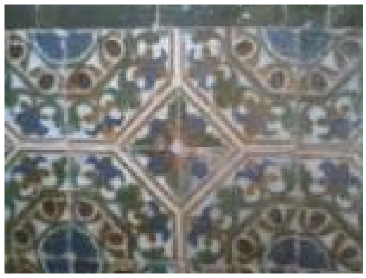
29. Dibuja en tu cuaderno los cuatro puntos de la figura. Determina, con regla, compás y transportador, el centro y el ángulo de giro sabiendo que los puntos *A* y *B* se han transformado mediante un giro en *A'* y *B'*.



30. Dibuja la imagen que resulta de aplicar al triángulo de la figura el giro de centro *O* que transforma el punto *A* en el punto *B*.

31. Utiliza un transportador de ángulos, regla y compás, para girar una recta 60º respecto a un punto *O* exterior a ella (es suficiente girar dos puntos de dicha recta). Mide los ángulos que forman las dos rectas, la inicial y la girada. ¿Observas alguna regularidad? Investiga un método para girar una recta transformando un solo punto. ¿Qué punto debes elegir y por qué?

32. Juego para dos jugadores: Forma sobre la mesa un polígono regular utilizando monedas (o fichas o bolitas de papel) como vértices. Alternativamente cada jugador retira o una moneda o dos monedas adyacentes. Gana quien retire la última moneda. (***Ayuda***: Es un juego de estrategia ganadora que puedes descubrir utilizando la simetría central).

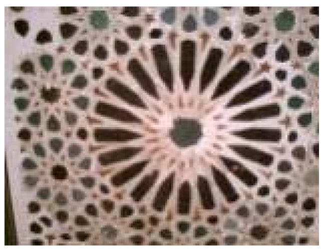


33. En el diseño de este mosaico se han utilizado giros en el plano. No lo vemos completo, pero podemos imaginar que fuera infinito. Indica los centros de giro que veas. En el centro de la figura hay un centro de giro clarísimo, ¿de qué ángulo? ¿Hay giros de 45º? ¿Cuáles son sus centros de giro? ¿Hay centros de simetría? Indícalos.

34. Para cada uno de los siguientes polígonos indica el centro de giro y el mínimo ángulo de giro que dejan invariantes a cada uno de ellos:

a) Pentágono regular	b) Hexágono regular	c) Decágono regular
d) Triángulo equilátero	e) Rectángulo	f) Cuadrado
g) Rombo	h) Paralelepípedo	i) Octógono regular

35. En la simetría central de centro (2, 3) hemos visto que el simétrico del punto *A* (8, 1) es el punto *A'* (–4, 5). Calcula los simétricos de los puntos *B* (12, 7), *C* (9, 10), *D* (5, 8) y *E* (7, 6).

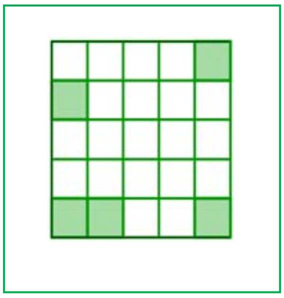


36. Indica si el mosaico de la Alhambra del margen tiene centro de giro, y determina cuál es el menor ángulo de giro que hace que el mosaico se superponga (sin tener en cuenta los cambios de color). ¿Hay centros de simetría?

37. Con ayuda de papel cuadriculado transforma mediante una simetría central, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos

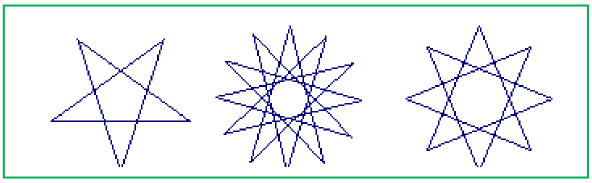
Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.



38. ¿Qué número mínimo de cuadrados es necesario pintar de verde para que el cuadrado grande tenga un centro de simetría?

39. Hemos girado el punto *A* (3, 5) y hemos obtenido el punto *A'* (7, –2). Determina el centro de giro y el ángulo utilizando regla, compás y trasportador de ángulos.

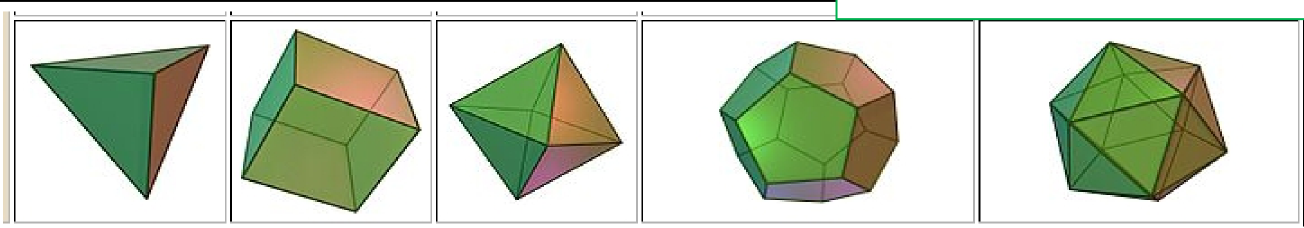


40. ¿Cuáles de los polígonos estrellados de la figura del margen tienen centro de simetría? Indica el centro de giro y el mínimo ángulo de giro que deja invariantes a cada uno de ellos.

41. Determina tres objetos cotidianos que tengan algún eje de giro.

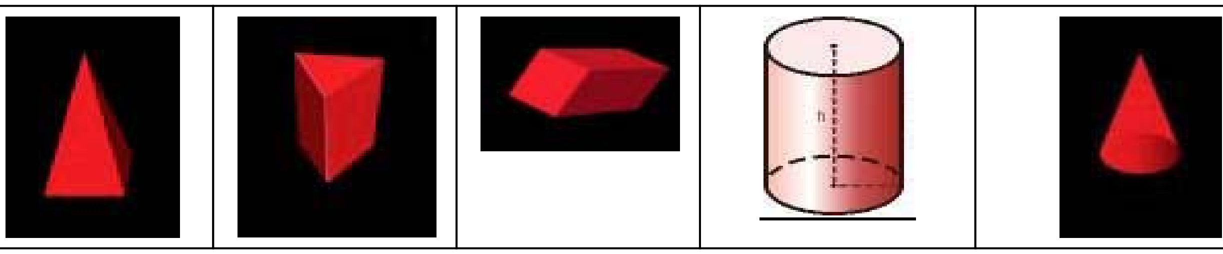
42. Observa esta torre mudéjar de Teruel. Está diseñada utilizando giros en el espacio. ¿Cuál es su eje de giro? ¿Y el ángulo de giro?

43. Piensa en los cinco poliedros regulares. Unos tienen simetría central en el espacio, otros no. ¿Cuáles la tienen?



TETRAEDRO HEXAEDRO OCTAEDRO DODECAEDRO ICOSAEDRO

44. Piensa ahora en los siguientes cuerpos geométricos: Una pirámide cuadrangular regular, un prisma triangular regular, un prisma romboidal oblicuo, un cilindro y un cono. ¿Cuáles pueden formarse mediante giros en el espacio? ¿Cuál es su eje de giro? ¿Cuáles tienen simetría central y cuáles no?



Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

Simetrías

45. Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia y una letra B. Dibuja la letra simétrica de B respecto del eje de abscisas y respecto del eje de ordenadas.

46. Clasifica las letras mayúsculas del alfabeto, a) en las que son simétricas respecto de un eje de simetría horizontal y un eje de simetría vertical. b) en las que sólo son simétricas respecto de un eje de simetría vertical, c) en las que sólo lo son respecto del eje de simetría horizontal, y d) en las que no tienen ningún eje de simetría. e) Comprueba que las letras que tienen dos ejes de simetría tienen centro de simetría. La razón ya la sabes: La composición de dos simetrías de ejes secantes es un giro.

47. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones de letras tienen un único eje de simetría? ¿Cuáles tiene dos ejes? ¿Cuáles ninguno? ¿Cuáles tienen centro de simetría?

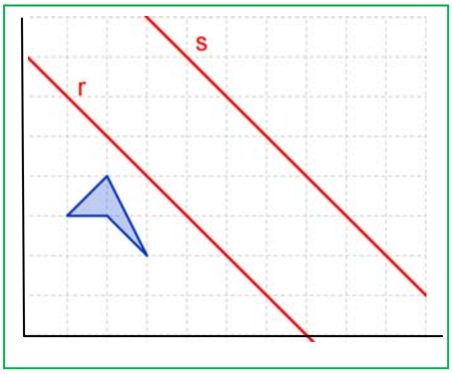
a) ONO b) NON c) DODO d) OIO e) HEMO f) HOOH

48. Indica los ejes de simetría de las siguientes figuras:

a) Cuadrado. b) Triángulo equilátero. c) Trapecio isósceles. d) Hexágono.

e) Circunferencia. f) Rectángulo. g) Rombo. h) Pentágono.

49. Considera que los vértices del cuadrilátero de la figura tienen de coordenadas: (1, 3), (2, 3), (3, 2) y (2, 4). Aplícale dos simetrías axiales de ejes paralelos, la primera respecto al eje *r* y la segunda respecto al eje *s*.



a) Indica las coordenadas de los vértices de las figuras transformadas por dicha composición de simetrías.

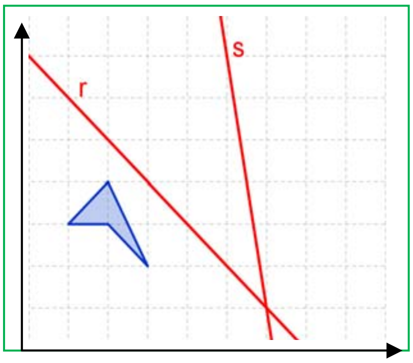
Si llamamos *C* al cuadrilátero inicial, *C'* a su simétrico respecto al eje *r* y *C''* al simétrico de *C'* respecto al eje *s*:

b) ¿Qué isometría nos permite trasformar directamente *C* en *C''*.

c) ¿Qué elementos la definen?

d) ¿Qué ocurre si aplicamos las dos simetrías en distinto orden, primero respecto al eje *s* y después respecto al eje *r*? ¿Cuáles son ahora las coordenadas de los vértices de la figura *C'''* transformada?

50. Considera que los vértices del cuadrilátero de la figura tienen de coordenadas: (1, 3), (2, 3), (3, 2) y (2, 4). Aplícale dos simetrías axiales de ejes secantes, la primera respecto al eje *r* y la segunda respecto al eje *s*.



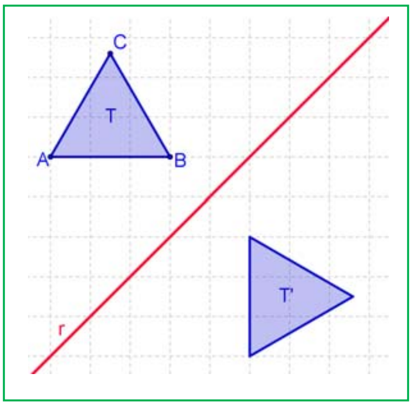
a) Indica las coordenadas de los vértices de las figuras transformadas por la composición de simetrías.

b) Si llamamos *C* al polígono inicial, *C'* al simétrico respecto al eje *r* y *C''* al simétrico de *C'* respecto al eje *s*: ¿Qué isometría nos permite trasformar directamente *C* en *C''*. ¿Qué elementos la definen?

c) ¿Qué ocurre si aplicamos las dos simetrías en distinto orden, primero respecto al eje *s* y después respecto al eje *r*? ¿Qué isometría tenemos ahora? ¿Qué elementos la definen?

d) Indica las coordenadas de los vértices de la figura transformada si primero aplicamos la simetría de eje *s* y luego la de eje *r*.

51. Dibuja en un papel el contorno de una figura irregular, en al menos cinco posiciones. (Si no se te ocurre ninguna figura, dibuja una letra G). a) ¿Son iguales estas figuras? Explica tu razonamiento. b) ¿Cómo puedes pasar de una figura a otra? c) Colorea con el mismo color todas las figuras que puedes alcanzar desde la posición inicial, desplazando la figura sin levantarla. Utiliza otro color para las restantes. ¿Se puede pasar siempre de una figura a otra del mismo color, deslizando la figura sin darle la vuelta? ¿Cambian las dimensiones de la figura?

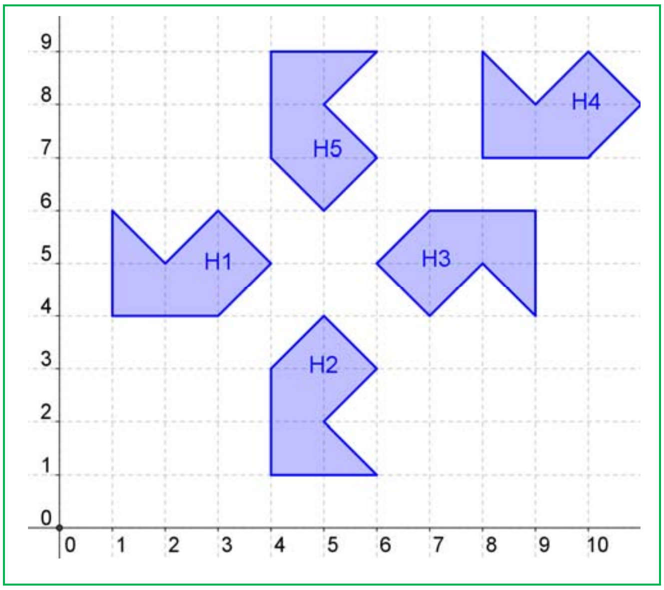


52. El triángulo equilátero T de la figura se ha transformado en el triángulo T' mediante una simetría axial de eje *r*. a) Copia el dibujo en tu cuaderno y nombra en el dibujo a *A'*, *B'* y *C'*, que son los transformados de *A, B* y *C* respectivamente. b) Encuentra un giro que trasforme T en T', indicando el centro y el ángulo de giro, ¿cuáles son ahora los trasformados de los vértices *A, B y C*.

53. Libro de espejos: Utiliza un libro de espejos para obtener simetrías. Puedes construir uno con dos rectángulos de metacrilato unidos con cinta de embalar. Mira por el libro de espejos un segmento, una circunferencia, diferentes figuras…

Problemas

54. Indica los puntos invariantes y las rectas invariantes en cada uno de los siguientes movimientos.



a) Una traslación según el vector (1, 3).
b) Una simetría axial respecto al eje de ordenadas.
c) Una simetría central respecto al centro de coordenadas.

55. En la figura adjunta el hexágono 1, denominado H1, ha cambiado de posición mediante movimientos. A) Indica el tipo de movimiento: traslación, giro o simetría que trasforma H1 en cada uno de los otros hexágonos. B) Determina, en cada caso, los elementos básicos que definen cada transformación indicando las coordenadas de cada uno de los vértices de H1 qué coordenadas tiene en cada uno de los transformados, y si es posible, generaliza.

56. Sabemos que las traslaciones no dejan ningún punto invariante, pero, a) ¿deja alguna recta invariante?

b) La simetría central deja un punto invariante, el centro, pero, ¿qué rectas deja invariantes una simetría central en el plano? ¿Y una simetría central en el espacio?

c) Una simetría axial deja invariantes todos los puntos de su eje, que es una recta invariante de puntos invariantes, pero ¿qué otras rectas invariantes deja una simetría axial? ¿Y qué otros puntos?

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

d) Una simetría especular, en el espacio, deja un plano invariante de puntos invariantes, el plano de simetría, ¿qué otros planos deja invariantes? ¿Qué otras rectas? ¿Qué otros puntos?

57. Copia en tu cuaderno y completa las siguientes tablas:

Tabla I: En el plano	**Puntos invariantes**	**Rectas invariantes**	**Rectas invariantes de puntos invarinates**
Traslación			
Simetría central			
Giro			
Simetría axial			
Simetría con deslizamiento			

Tabla II: En el espacio	**Puntos invariantes**	**Rectas invariantes**	**Planos invariantes**
Traslación			
Simetría central			
Giro			
Simetría especular			
Simetría con deslizamiento			

58. Dibuja el triángulo T de vértices *A* (2, 1), *B* (4, 2) y *C* (1, 3)

a) Aplica a T una traslación según el vector ***u*** = (–3, 2), llama T' a su transformado e indica las coordenadas de sus vértices.

b) Dibuja el triángulo T'' que resulta de aplicar a T un giro de 270º respecto al origen de coordenadas e indica las coordenadas de sus vértices.

59. Dibuja el cuadrado *K* de vértices *A* (2, 1), *B* (4, 2) *C* (1, 3) y *D* (3, 4).

a) Aplica a *K* una traslación según el vector ***u*** = (–3, –1), llama *K*' a su transformado e indica las coordenadas de sus vértices.

b) Dibuja el cuadrado *C*'' que resulta de aplicar a *C* una simetría central respecto al punto (3, 0) e indica las coordenadas de sus vértices.

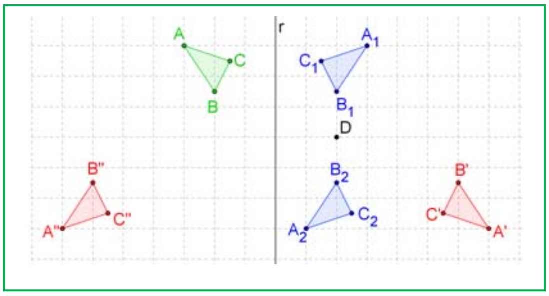
Problemas de ampliación

60. Transforma la letra L mediante dos isometrías consecutivas. ¿Puedes obtener el resultado final mediante una única isometría? Analiza posibles situaciones.

61. Pliega una tira de papel como un acordeón. Haz algunos cortes y despliégala. Habrás confeccionado un friso. Señala en él todas las isometrías. Ensaya otros diseños de frisos.

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

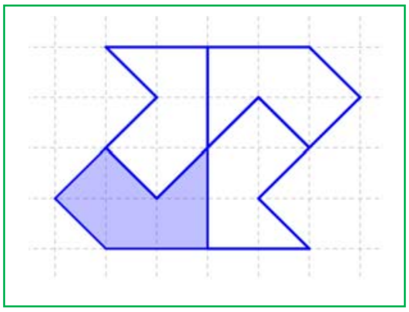
62. La composición de isometrías no es conmutativa. Observa la figura adjunta:



a) Determina la isometría que transforma el triángulo *ABC* en $A_1B_1C_1$ y la que transforma éste en $A_2B_2C_2$

b) Indica la isometría que transforma el triángulo *ABC* en *A’B’C’* y la que transforma éste en *A’’B’’C’’*.

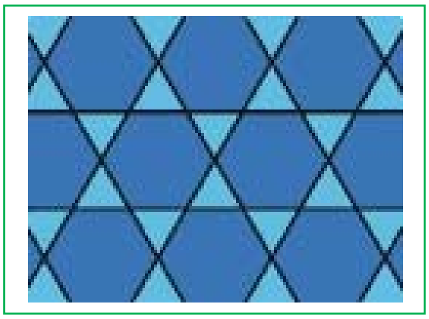
c) ¿Qué conclusión obtienes?



63. Indica las isometrías que hay que aplicar a la figura coloreada en azul para obtener la figura completa. Determina los elementos que definen cada isometría. Colorea de distinto color cada uno de los cuatro polígonos y construye un friso.

64. 1) La letra A tiene un eje de simetría vertical. 2) La letra H tiene dos ejes de simetría, uno vertical y el otro horizontal, además de un centro de simetría. 3) La letra Z tiene centro de simetría, pero ningún eje de simetría. 4) La letra E tiene un eje de simetría horizontal. 5) La letra F no tiene centro de simetría ni ningún eje de simetría. Clasifica las letras del **abecedario** en estos grupos, en el primer grupo estarán las que tienen un eje de simetría vertical, como la letra A, en el segundo las que tiene dos ejes de simetría, uno vertical y el otro horizontal, como la letra H, en el tercero las que sólo tienen centro de simetría como la letra Z, y en el cuarto las que como la letra E tienen un eje de simetría horizontal. Por último, en un quinto grupo las que no tienen ningún tipo de simetría como la letra F.

65. Análisis de un mosaico: Dibuja en tu cuaderno una trama de triángulos, en ella un esquema del mosaico del margen y señala en tu dibujo todos los ejes de simetría, los centros de giro y los vectores de traslaciones por los cuales el transformado de un punto del mosaico (supuesto que se prolonga hasta el infinito) es también un punto del mosaico.



a) ¿Hay giros de 60º? Si los hay marca los centros de estos giros con un asterisco *.

b) ¿Hay giros de 180º? Si los hay marca los centros de estos giros con un círculo o.

c) Señala los ejes de simetría que encuentres con una línea de puntos.

d) Dibuja al margen los vectores de traslación, horizontales y verticales, que haya.

e) Diseña tu propio mosaico que mantenga los mismos movimientos haciendo algo sencillo (un arco, una poligonal) que se vaya moviendo.

66. Analiza este otro mosaico. Indica las transformaciones que tenemos que aplicar al elemento mínimo del mosaico adjunto para dejarlo invariante. Indica también los elementos que las caracterizan.

67. En la animación siguiente observa la forma de obtener un mosaico.

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195375_am_1.swf

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

Ha tomado una celda unidad de 4 cuadraditos, ha seleccionado un motivo mínimo… Indica que simetrías ha utilizado, qué giros y qué traslaciones.

68. Determina los ejes y centros de simetría de las siguientes gráficas de funciones. Señala cuáles son pares y cuáles impares. (Dibuja previamente su gráfica).

a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = x^4$ d) $y = x$

69. Un tetraedro regular tiene 6 planos de simetría, dibujalos en tu cuaderno e indica la forma de determinarlos.

70. Un octaedro tiene 9 planos de simetría, dibújalos, 6 pasan por los puntos medios de aristas opuestas, ¿sabes caracterizar los otros 3? Intenta encontrar planos de simetría en un dodecaedro, y en un icosaedro.

71. Un ser humano es más o menos simétrico. Los mamíferos, pájaros y peces también lo son. Tienen un plano de simetría. A) Y las estrellas de mar como la de la figura, ¿tienen un plano de simetría? B) ¿Tienen más? ¿Cuántos? C) ¿Tiene un eje de giro? ¿De qué ángulos? D) ¿Tiene simetría central? E) Dibuja en tu cuaderno una estrella de cinco puntas e indica sus ejes de simetría y su centro de giro. (Es un grupo de Leonardo D_5)

72. Un prisma recto de base un rectángulo, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?

73. Una pirámide regular de base un triángulo equilátero, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?

74. Describe las **isometrías** que dejan invariantes a los siguientes cuerpos geométricos, analizando sus elementos:

a) Esfera b) Cilindro recto c) Prisma regular de base cuadrada
d) Cono e) Cilindro oblicuo f) Pirámide recta de base un triángulo equilátero

75. Recorta un triángulo isósceles obtusángulo. Colócalo en el libro de espejos de forma que dos lados queden apoyados en la superficie de los espejos, y el otro sobre la mesa. Mueve las páginas del libro de forma que veas distintas pirámides, en las que su base son polígonos regulares. Esto nos permite estudiar el giro de las pirámides, de qué ángulo es. (Puedes construirte un libro de espejos con dos espejos pequeños o dos hojas de metacrilato, pegados con cinta de embalar adhesiva).

76. Piensa en los poliedros regulares. Copia la siguiente tabla en tu cuaderno y complétala:

POLIEDRO	¿Tiene centro de simetría? SI/NO	¿Tiene ejes de giro? SI/NO	¿Cuántos ejes de giro tiene? ¿De qué ángulos?	¿Tiene planos de simetría? SI/NO	¿Cuántos planos de simetría tiene?
Tetraedro					
Cubo					
Octaedro					
Dodecaedro					
Icosaedro					

77. Contesta a las siguientes preguntas justificando las respuestas.

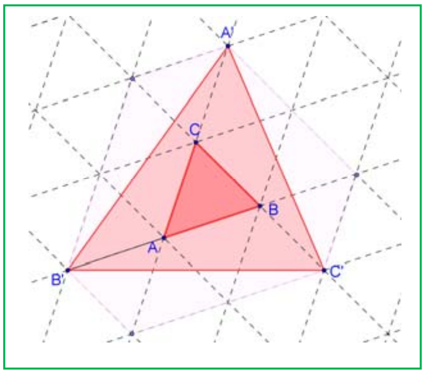
Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

a) ¿Es posible que una figura tenga dos ejes de simetría paralelos?

b) La intersección de dos ejes de simetría, ¿es siempre un centro de simetría?

c) ¿Por qué un espejo cambia la derecha por la izquierda y no cambia lo de arriba por lo de abajo?

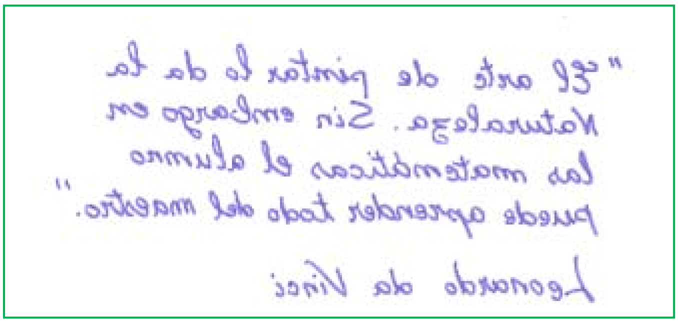
d) ¿Es cierto que dos círculos simétricos respecto a un plano son siempre cortes de una esfera?



78. A partir de un triángulo cualquiera *ABC* construimos el triángulo *A'B'C'*, en el que *A'* es el simétrico de *A* con respecto al centro *C*, *B'* es el simétrico de *B* con respecto al centro *A* y *C'* es el simétrico de *C* con respecto al centro *B*. Utiliza la trama de triángulos para calcular el área del triángulo *A'B'C'* sabiendo que el valor del área del triángulo *ABC* es 1 u^2.

79. Caleidoscopios diédricos: ¿Has mirado alguna vez por un caleidoscopio? Están formados por un tubo de cartón, dos espejos formando ángulo y trocitos de plástico o cristalitos que combinan sus imágenes dando lugar a preciosas composiciones llenas de simetrías. Fabrica uno, y estudia los giros y simetrías que observes.

80. Simetrías plegando papel: a) Dobla una hoja de papel y recorta una figura. Al desdoblar habrás obtenido la figura simétrica. b) Dobla una hoja de papel mediante dos dobleces perpendiculares. (Tendrás que hacer coincidir el doblez consigo mismo). Manteniendo el papel doblado recorta una figura. Al desdoblar, la figura obtenida tendrá una doble simetría. c) Con otra hoja de papel, vuelve a doblar mediante dos dobleces perpendiculares. Dobla de nuevo por la mitad el ángulo recto obtenido. Recorta los diseños que más te gusten. Estas construyendo modelos de copo de nieve. ¿Cuántos ejes de simetría has obtenido? d) Intenta ahora doblar la hoja de papel para obtener ejes de simetría que formen ángulos de 60º y de 30º. Utiliza tu imaginación para obtener nuevos diseños de copos de nieve.



81. La simetría en la escritura de Leonardo Da Vinci: ¿Sabías que, si miras lo escrito por Leonardo en un espejo puedes leerlo con facilidad? Es un buen ejemplo de simetría especular. Lee el siguiente texto del Leonardo.

82. Utiliza la propiedad de la composición de dos simetrías de ejes secantes para demostrar que un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad del central que abarca el mismo arco. *Ayuda*: Traza la circunferencia, un ángulo inscrito y su central. Traza dos rectas perpendiculares por el centro de la circunferencia a los lados del ángulo inscrito.

83. Estudia las isometrías que dejan invariante a un triángulo equilátero. Nombra sus vértices y sus ejes de simetría. a) Aplica al triángulo un giro de 120º y luego una simetría. ¿Puedes obtener el mismo resultado con una única transformación? b) Repite lo mismo con un giro de 240º y otra simetría. c) Comprueba que siempre la composición de un giro por una simetría es otra simetría. d) Haz ahora un giro de 120º y otro de 240º, ¿qué obtienes? e) ¿Y con dos giros de 240º? f) Comprueba que la composición de dos giros del mismo centro es siempre un giro (o la identidad).

84. Al pasear por la ciudad, mirar el aula, en todo lo que nos rodea podemos ver como la Geometría permite explicarlo. Mira este mosaico. Busca un motivo mínimo, es decir, un trozo de mosaico que te permite, mediante movimientos, recomponerlo. En el diseño de este mosaico, ¿se han utilizado simetrías?

- ¿Hay simetrías de eje vertical?
- ¿Hay simetrías de eje horizontal?
- ¿Hay otros ejes de simetría? ¿Cuáles?
- ¿Hay giros de 90º?
- ¿Hay giros de 45º?
- ¿Hay traslaciones?

85. Diseña en tu cuaderno un motivo mínimo (si no se te ocurre ninguno, usa la letra L), y utiliza las mismas simetrías, giros y traslaciones que se usan en este mosaico para hacer tu propio diseño de mosaico.

Observa tu diseño, y responde a las siguientes preguntas:

- ¿Si compones dos simetrías de ejes paralelos, qué movimiento obtienes? ¿Es otra simetría? ¿Es un giro? ¿Es una traslación? Indica en tu diseño de mosaico en qué ocasión has compuesto dos simetrías de ejes paralelos y describe completamente el movimiento que has obtenido.
- ¿Si compones dos simetrías de ejes secantes, qué movimiento obtienes? ¿Es otra simetría? ¿Es un giro? ¿Es una traslación? Indica en tu diseño en qué ocasión has compuesto dos simetrías de ejes secantes y describe completamente el movimiento que has obtenido.

86. Mira este otro mosaico. Es el famoso mosaico Nazarí de los huesos. No vamos a tener en cuenta el color. Para diseñar el hueso, dibuja en tu cuaderno un cuadrado. Mira la figura. Corta en los lados verticales un trapecio y colócalo sobre los lados horizontales. Ya tienes el hueso. ¿Es simétrico? Tiene un eje de simetría vertical y otro horizontal, por lo que podríamos tomar como motivo mínimo la cuarta parte del hueso.

- Para pasar de un hueso de color a un hueso blanco, ¿qué trasformación se ha usado?
- Dibuja en tu cuaderno, en color rojo, ejes de simetría verticales y en color azul, ejes de simetría horizontales.
- Señala, con un asterisco, (*), centros de giro de 90º, y con un círculo, (o), centros de simetría.
- Utilizando el hueso dibuja en tu cuaderno el mosaico completo.

87. Dibuja en tu cuaderno una letra F mayúscula, y traza también dos rectas *m* y *n* que formen un ángulo de 30º y se corten en un punto *O*. Dibuja su transformado por:

a) Un giro de centro el punto *O* y ángulo 60º.
b) La simetría de eje *n*
c) La simetría de eje *m*
d) La composición de la simetría de eje *n* con la de eje *m*
e) Compara el resultado obtenido en el apartado a) con el del apartado d). ¿Qué observas?

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández y Javier Rodrigo
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

AUTOEVALUACIÓN

1. Con la traslación de vector **u** = (–3, 8) trasladamos el punto *P* (5, –4) hasta el punto *P’* y las coordenadas de *P´* son:

a) (8, 4) b) (2, 4) c) (2, 12) d) (6, 3)

2. Al trasladar *A* (–1, 8) hasta *A’* (4, 6) se utiliza el vector **u**:

a) **u** = (3, 2) b) **u** = (3, –2) c) **u** = (5, –2) d) **u** = (5, 14)

3. La transformación que lleva el punto *A* (2, 0) en el punto *A’* (0, 2) **no** puede ser:

a) Un giro de centro el origen y ángulo 90º

b) Una traslación de vector **u** = (–2, 2)

c) Un giro de centro el origen y ángulo 270º

d) Una simetría de eje $y = x$.

4. La transformación identidad también se llama:

a) Simetría central b) Simetría axial c) Giro de 180º d) Traslación de vector nulo (0, 0)

5. ¿Cómo debe ser un triángulo para tener más de dos ejes de simetría?

a) rectángulo b) isósceles c) equilátero d) rectángulo isósceles

6. La simetría central en el plano es un giro de:

a) 360º b) 180º c) 90º d) 0º

7. En el plano, la composición de dos simetrías de ejes secantes siempre es:

a) una traslación b) un giro c) otra simetría d) la simetría central

8. Las coordenadas del punto simétrico al punto *A* (3, 7) respecto del eje de ordenadas son:

a) *A’* (–3, 7) b) *A’* (3, –7) c) *A’* (–3, –7) d) *A’* (7, 3)

9. Indica cuál de las siguientes letras **no** tiene simetría central:

a) O b) H c) S d) D

10. Siempre se obtiene un giro haciendo sucesivamente:

a) Dos giros de distinto centro

b) Dos simetrías de ejes secantes

c) Un giro y una simetría

d) Dos simetrías de ejes paralelos.