geometría métrica aplicada

I

5

TANGENCIAS II: APLICACIÓN DEL CONCEPTO DE INVERSIÓN.

BLOQUE

5 TANGENCIAS II: APLICACIÓN DEL CONCEPTO DE INVERSIÓN

OBJETIVOS

1. Relacionar –como transformación geométrica basada en la proporcionalidad inversa– el concepto de **inversión** en el plano con el de **potencia** de un punto respecto a una circunferencia.
2. Valorar y analizar las posibilidades que ofrece la inversión en el plano al simplificar los problemas de tangencias e imprimirles elegancia y precisión en su trazado.

1 INVERSIÓN

La *inversión* es una transformación geométrica cuya propiedad fundamental es mantener la tangencia entre las formas; es decir, si dos líneas son tangentes en un punto *T*, sus inversas también lo son en el punto *T'*, inverso de *T*.

La aplicación de las propiedades que trae consigo la *teoría de inversión*, simplifican, enormemente, la solución de muchos problemas de tangencias y resuelven otros que no encontrarían fácil solución por teorías vistas anteriormente (homotecia o potencia). Especial interés constituye su utilización en el trazado de circunferencias tangentes a circunferencias y rectas, lo que suele identificarse como los *Problemas de Apolonio*.

1.1 Definición y elementos.

Dos puntos alineados con un tercero fijo *O*, se dice que están en inversión cuando en la correspondencia puntual de ellos mismos el producto de sus distancias a *O* es constante. Esto es, cuando se verifica que:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = k^2 \text{ (cte.)}$$

La constante, k^2, se llama ***potencia de inversión***; el punto fijo, *O*, ***centro de inversión (C.I.)***; y los puntos *A y A'*, puntos inversos.

1.2 Puntos concíclicos.

De la definición anterior se desprende que cualquier pareja de puntos *A y B* tiene por inversa a otra pareja *A' y B'*, respectivamente alineados con el centro de inversión *O*, de forma que:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = k^2 \text{ (cte.)}$$

Esta expresión hace recordar la definición de ***potencia*** de un punto respecto a una circunferencia (de ahí la denominación de potencia de inversión dada a la constante k^2) y sus consecuencias y propiedades, estudiadas en la unidad didáctica anterior.

Por ello, las parejas de puntos inversos, antes mencionadas, se encuentran situadas en una misma circunferencia, esto es, los cuatro puntos *(A - A' - B - B')* son concíclicos; lo que significa que el ángulo α formado por el segmento $\overline{AB}$ con la recta $\overline{OB}$ es igual al que forma $\overline{A'B'}$ con $\overline{OA'}$, puesto que ambos son ángulos inscritos a la circunferencia y abarcan el mismo arco.

Lo dicho verifica que los segmentos definidos por parejas de puntos inversos son ***antiparalelos*** respecto a los rayos que contienen a los extremos de dichos segmentos y al centro de inversión.

2 PUNTOS DOBLES EN LA INVERSIÓN

2.1 Circunferencia de autoinversión.

En una inversión de centro *O* y potencia k^2 existe una serie de puntos que coinciden con sus inversos. Dado que el producto de distancias del centro de inversión a los puntos inversos ha de ser constante e igual a la potencia (k^2), todos los puntos que distan de *O* una magnitud igual a *k* coincidirán con sus inversos y serán, por tanto, dobles en una transformación *directa o positiva*, donde cada punto y su inverso se encuentran en la misma dirección (por definición) y situados en el mismo sentido. Se trata pues, de todos aquellos puntos que conforman una circunferencia, denominada de ***autoinversión***, con centro el punto *O* y por radio $\sqrt{k^2} = k$.

Para diferenciarla de otras circunferencias, gráficamente conviene representarla a trazos (en línea fina y discontinua).

2.2 Circunferencias ortogonales a la circunferencia de autoinversión.

Cuando se desea hallar la inversa de una circunferencia que corta ortogonalmente a la de autoinversión se demuestra que la figura inversa es ella misma.

Se entiende que dos curvas se cortan *ortogonalmente*, cuando sus respectivas rectas tangentes, en el punto de contacto, son perpendiculares.
En consecuencia, se cumple:

$$\overline{OT}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \ldots = k^2 \text{ (cte.)}$$

De tal forma que parte un de determinado arco de la circunferencia y tiene por inversa a la otra parte de la misma, y viceversa. Nótese que los cuatro puntos *A - A' y B - B'* son concíclicos.

Por ello, se puede enunciar que la circunferencia es doble por coincidir con su transformada, aunque no de puntos dobles, al no coincidir los puntos con sus inversos.

3 DETERMINACIÓN DE PUNTOS INVERSOS

Dada una inversión de centro *O* y potencia k^2 se trata de determinar, gráficamente, el punto inverso de otro dado.

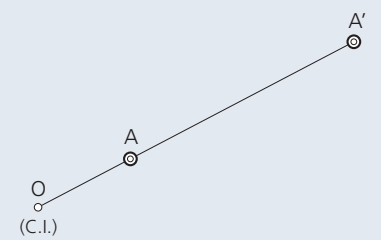
Si el punto dado *A* es interior a la circunferencia de autoinversión *(fig. 3.1)* el proceso de construcción para determinar su punto inverso *(A')* es como sigue:

- En la recta que une el centro de inversión *O* con el punto *A* se encuentra el inverso de éste *(A')*.
- Por el punto *A* se traza la perpendicular a la recta anterior *(OA)* que corta a la circunferencia de autoinversión en el punto doble *B*. Por él se lanza la tangente que intersecciona a la recta *OA* en el punto *A'*, inverso de *A*.

Si el punto es exterior a la circunferencia de autoinversión *(fig. 3.2)*, el proceso de construcción es el mismo, pero recorrido en sentido contrario. Es el caso de partir de conocer *A'* y tener que determinar la posición de su inverso, el punto *A*.

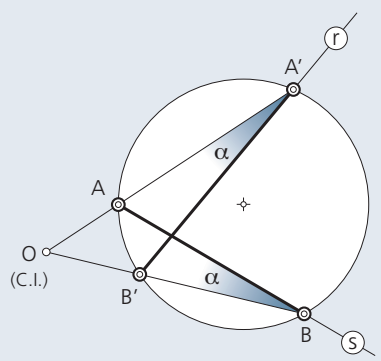
El proceso descrito se fundamenta en el antiparalelismo antes mencionado, consistente en que si $\overline{AB}$ es perpendicular a $\overline{OA}$, el segmento $\overline{A'B'}$ ha de serlo igualmente a $\overline{OB'}$. Nótese que, considerando el triángulo *OBA'*, rectángulo en *B*, el cateto $\overline{OB} = k$ es media proporcional o geométrica de su proyección $\overline{OA}$ sobre la hipotenusa y de la magnitud $(\overline{OA'})$ de esta.

DEFINICIÓN Y CONSECUENCIA



$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = k^2$ (cte.)

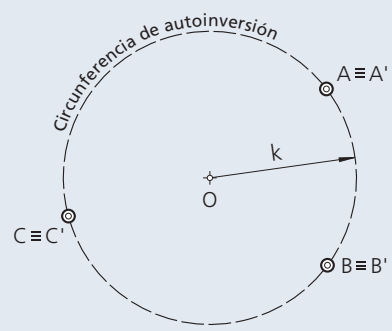
1.1 Inversión de centro **O** y potencia k^2.



$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = k^2$ (cte.)

1.2 Las parejas de puntos inversos son concíclicos.

AUTOINVERSIÓN



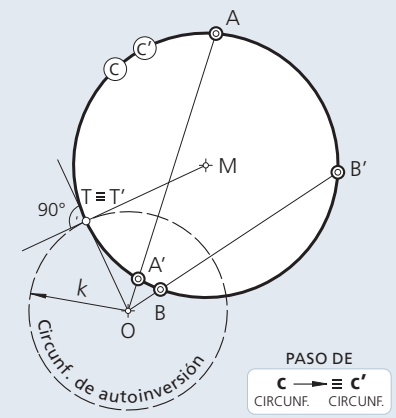
$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OC} \cdot \overline{OC'} = k^2$

$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OC}^2 = k^2$

luego: $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = k^2$

2.1 Circunferencia de autoinversión.

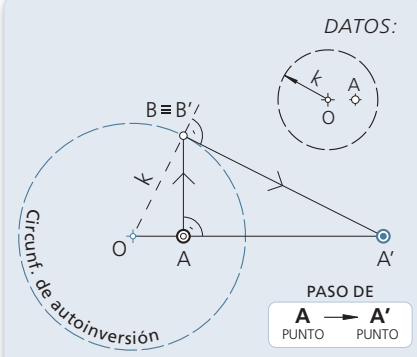
CIRCUNFERENCIA DOBLE



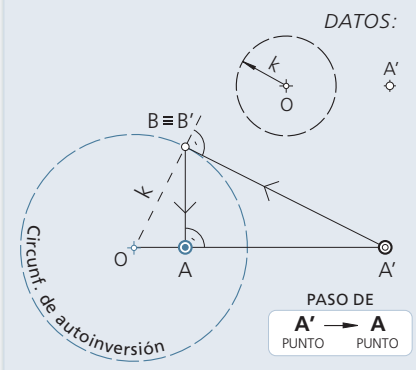
$\overline{OT}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \ldots = k^2$

2.2 Las circunferencias ortogonales a la autoinversión son dobles.

DETERMINACIÓN DE PUNTOS INVERSOS



3.1 Determinación de **A'** como punto inverso del punto **A**.



3.2 Determinación de **A** como punto inverso del punto **A'**.

4 FIGURA INVERSA DE UNA RECTA

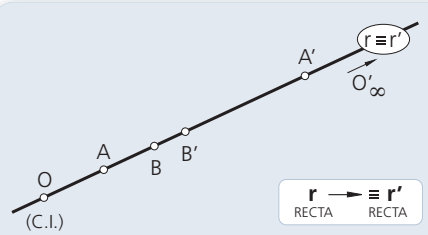
Dada una inversión definida por la posición de su centro *O* y por una potencia de inversión k^2, pueden darse dos posiciones relativas entre la recta y el centro de inversión: que la recta pase por el centro *O* de inversión, o que no pase por él.

Analicemos, para cada caso, la determinación de la figura inversa de la recta.

4.1 Figura inversa de una recta que pasa por el centro de inversión.

En este caso, los distintos puntos de la recta tienen sus inversos sobre la misma, por lo que se puede enunciar que la figura inversa de una recta que pasa por el centro de inversión es coincidente con la recta dada, siendo una figura doble, aunque no de puntos dobles, ya que cada punto no coincide con su transformado.

Al punto *O*, centro de inversión, le corresponde el punto impropio O'_∞ sobre la recta *r* considerada *(fig. 4.1)*.



4.1 Las rectas que pasan por **O** son dobles.

4.2 Figura inversa de una recta que no pasa por el centro de inversión.

Partiendo, como siempre, de conocer el centro de la inversión y el valor de la potencia, vamos a considerar, separadamente, las tres posibles posiciones que puede tomar la recta *r* (dato) con respecto a la circunferencia de autoinversión: que sea secante, tangente o exterior. En todos ellos, la figura inversa de la recta siempre es una circunferencia *(r')* que pasa por el centro de inversión *O*.

4.2.1 Caso en que la recta *r* sea secante a la circunferencia de autoinversión.

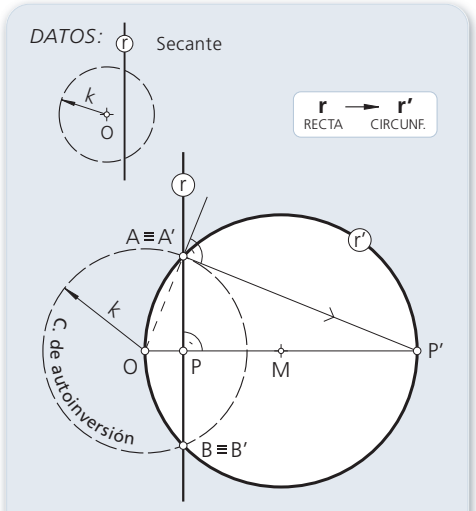
La figura inversa *(r')* es una circunferencia que pasa por tres puntos: los puntos dobles *A* y *B* junto con el centro de inversión *O*. Asimismo, su diámetro queda definido por sus extremos *O* y *P'*, éste último inverso del punto *P*, pie de la perpendicular trazada a la recta *r* desde el centro *O*.

4.2.2 Caso en que la recta *r* sea tangente.

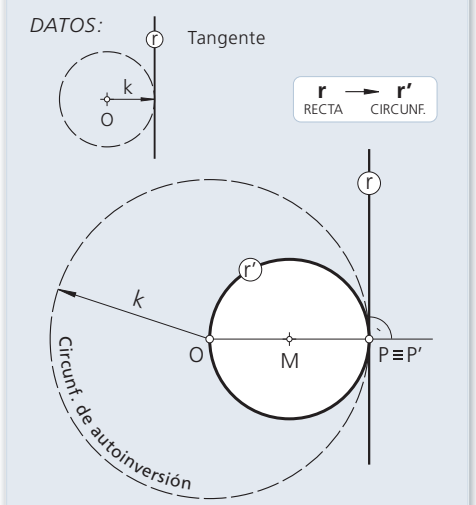
Cuando la recta es tangente en un punto *P* a la circunferencia de autoinversión, la figura inversa es una circunferencia de diámetro *OP*. Su representación es inmediata *(fig. 4.2.2)*.

4.2.3 Caso en que la recta *r* sea exterior a la circunferencia de autoinversión.

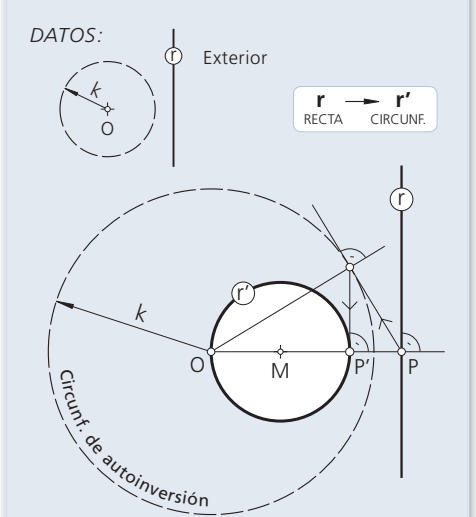
Análogamente a lo visto en los casos anteriores, el punto *P'*, inverso de *P* (pie de la perpendicular trazada desde el centro de inversión *O* a la recta *r* dada), determina el diámetro *OP'* de la circunferencia *(r')*, como figura inversa de *r*.



4.2.1 Recta secante.



4.2.2 Recta tangente.



4.2.3 Recta exterior.

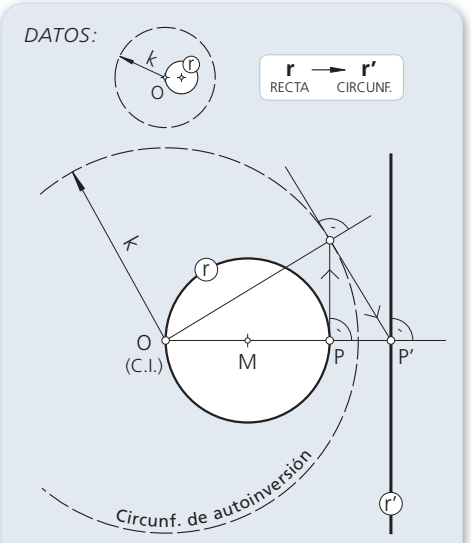
5 FIGURA INVERSA DE UNA CIRCUNFERENCIA

Conocido el centro de la inversión y su potencia, lo que significa tener definido el radio de la circunferencia de autoinversión, pueden darse dos situaciones de una circunferencia respecto al centro *O* de la inversión: que la circunferencia dada pase por el centro de inversión o que no le contenga.

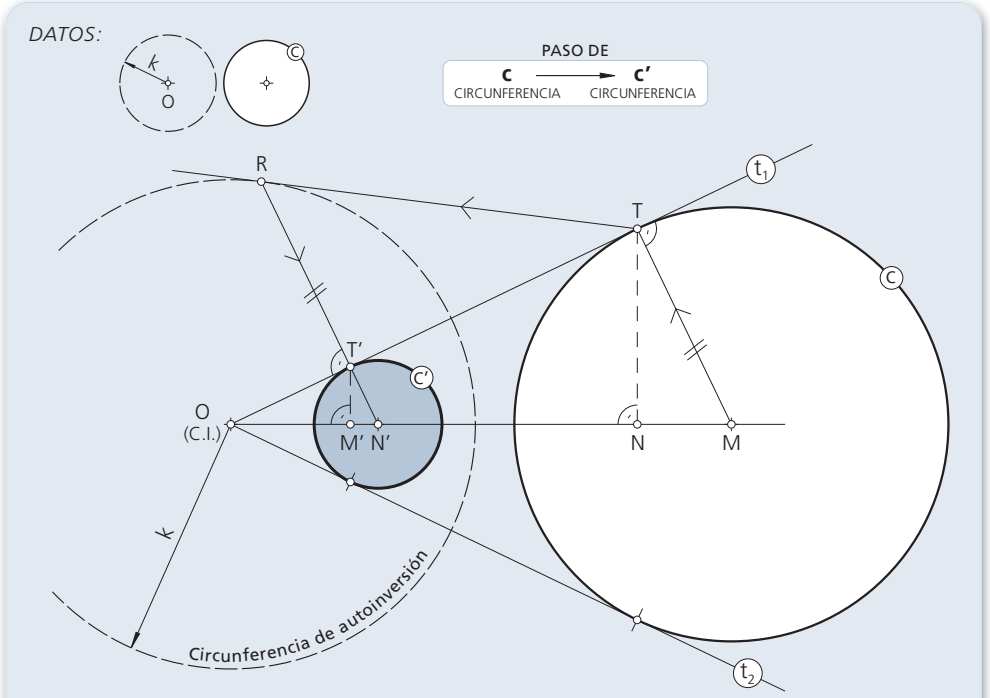
5.1 Figura inversa de una circunferencia que pasa por el centro de inversión.

Cuando la circunferencia *r* dada, de centro *M* y radio conocido, pasa por el centro de inversión *O*, su figura inversa será una recta perpendicular a la recta *OM* ya que, dado que la inversión es una transformación geométrica biunívoca, estaremos ante el caso recíproco al de la figura inversa de una recta que no pasa por el centro de inversión, analizado anteriormente.

Por ello, se considera el punto *P*, diametralmente opuesto al centro *O*, y se halla su inverso *P'*. La recta *r'*, perpendicular a *OP*, es la figura inversa de la circunferencia *r* dada.



5.1 Inversa de circunferencia que pasa por **O**.



5.2 Inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión **O**.

5.2 Figura inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión.

Si la circunferencia *c* dada, de centro *M* y radio conocido, no pasa por el centro de inversión *O*, su figura inversa es otra circunferencia, homotética con relación a dicho centro, que tampoco pasa por el centro de inversión.

Su trazado, más rápido, es como sigue:

- Desde el centro de inversión se trazan las rectas tangentes a la circunferencia dada, que lo serán a la figura inversa de ésta. Consideremos únicamente una de las dos; por ejemplo, en la *fig. 5.2*, vamos a operar con la tangente t_1.
- Localizado el punto de tangencia *T* se determina su inverso *T'* y, prolongando la recta *RT'*, el punto *N'* (centro de la circunferencia solución), inverso del punto *N* (pie de la perpendicular a *OM* trazada desde el punto *T*).
- Obsérvese cómo el punto inverso del centro *M* de la circunferencia dada es el pie *M'* de la perpendicular a *OM* trazada por *T'*; y viceversa, el centro *N'* de la circunferencia solución (inversa de la dada) tiene como punto inverso el pie *N* antes mencionado.

6 LA INVERSIÓN CONSERVA LOS ÁNGULOS

La inversión es una transformación conforme, esto es, una transformación que conserva los ángulos que forman dos líneas entre sí.

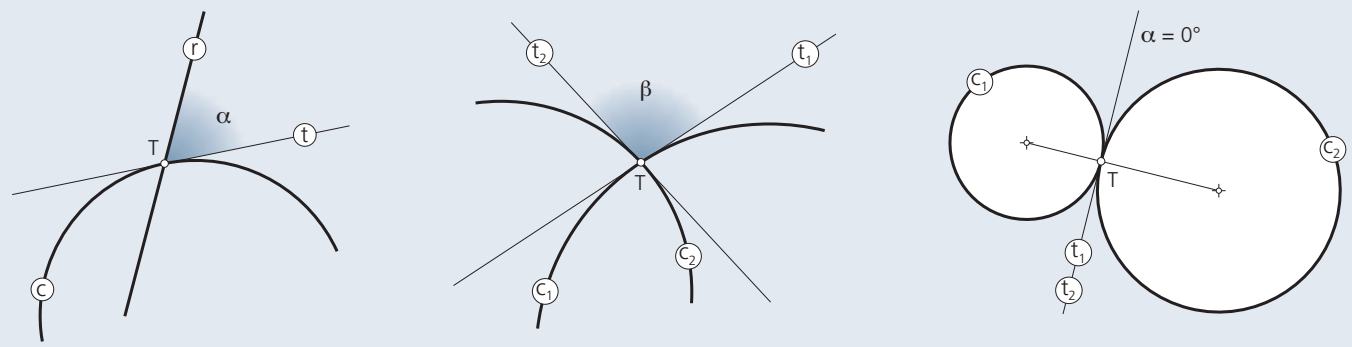
Se denomina ángulo de una recta ***r*** con una curva ***c*** *(fig. 6a)* al que forma la recta con la tangente a la curva trazada por su punto común ***T***. De igual modo, el ángulo que forman dos curvas, c_1 *y* c_2, al cortarse *(fig. 6b)*, viene dado por el ángulo formado por sus tangentes respectivas trazadas por el punto intersección ***P***.

Por lo dicho se desprende que dos circunferencias tangentes entre sí forman un ángulo de ***0º*** *(fig. 6c)*.

Si el ángulo es recto, los arcos o las circunferencias a que pertenecen se denominan ***ortogonales***.

La inversión, por tanto, conserva las tangencias, lo que puede enunciarse así: *«Dos figuras originales tangentes tienen por inversas dos figuras también tangentes y los puntos de tangencia (pareja de inversos) están alineados con el centro de inversión»*.

LA INVERSIÓN ES UNA TRANSFORMACIÓN CONFORME



6a Ángulo entre la recta **r** y la curva **c**. 6b Ángulo entre dos curvas secantes c_1 y c_2. 6c Ángulo entre dos circunf. tangentes c_1 y c_2.

7 APLICACIONES

La aplicación de la teoría de inversión se dirige, fundamentalmente, a la resolución de ejercicios de tangencias; lo que permite resolver numerosos problemas geométricos, entre los que se destaca la determinación de circunferencias tangentes que, en un principio, se tornan complejos. Para ello, es conveniente elegir el centro y la potencia de inversión adecuados, como se verá en las aplicaciones que siguen: se pretende reducir el problema a trazar rectas tangentes a circunferencias y no de éstas entre sí.

7.1 Circunferencias que pasan por los puntos *(P* y *Q)* y son tangentes a otra de centro *O*.

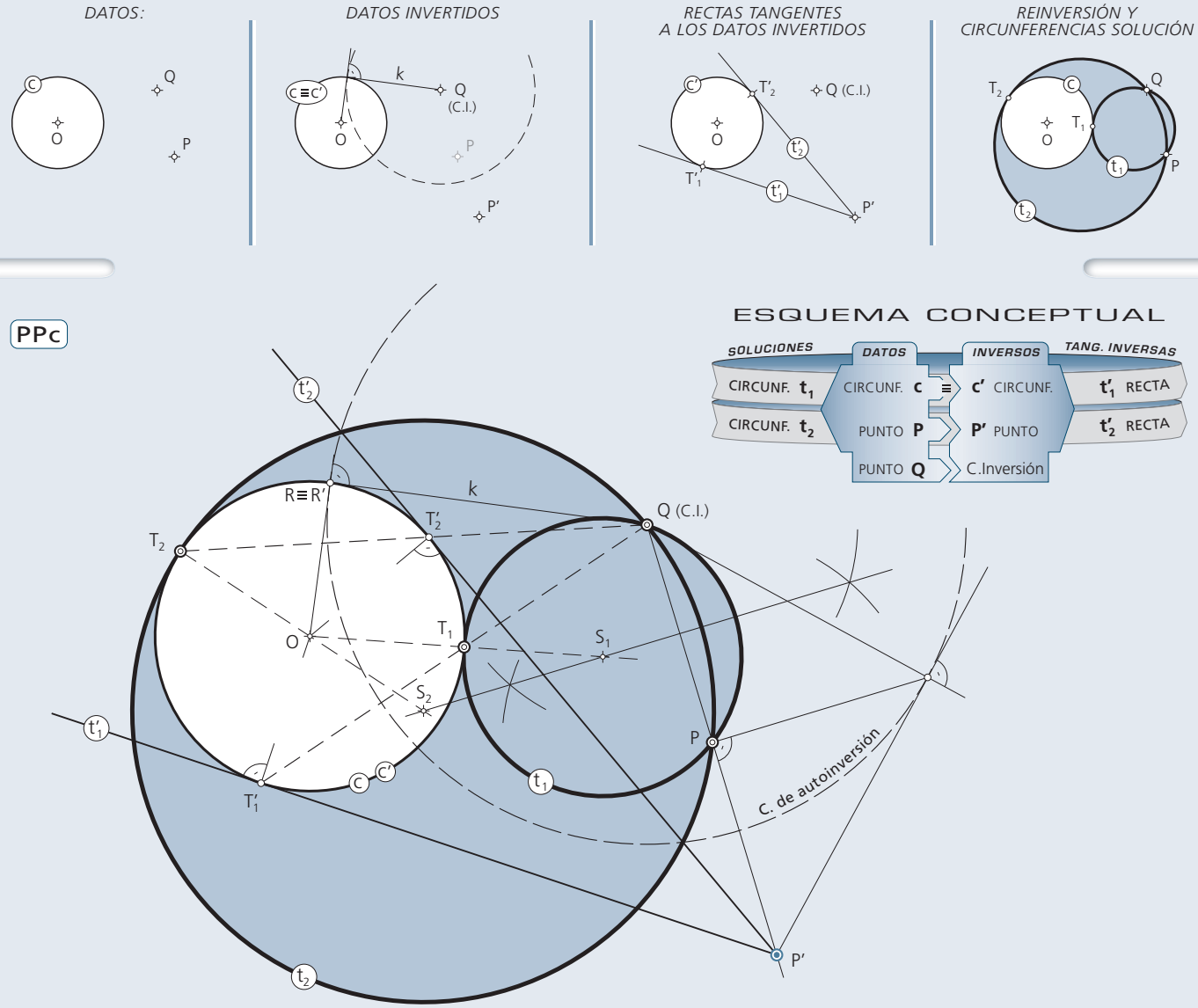
Este problema, resuelto en la *U.D.* anterior mediante el empleo de la teoría de potencia, tiene fácil e ingenioso tratamiento aplicando la teoría de inversión; lo que significa invertir los datos para simplificar el tratamiento de su solución.

- *Proceso a seguir:*

- Siempre que se tenga que hacer pasar una circunferencia por un punto se utilizará éste como centro de inversión (en la *figura*, el punto ***Q***).

  La potencia de inversión se condiciona a que uno cualquiera de los datos tenga por inverso él mismo, lo que simplifica el proceso. Así, sabiendo que toda circunferencia ortogonal a la de autoinversión es doble, se condiciona a que ésta tenga por radio el segmento de tangente $\overline{QR}$. Con ello, la figura inversa de la circunferencia ***c*** es ella misma *(c')*. Asimismo, se halla ***P'***, inverso de ***P***.
- Las rectas tangentes t'_1 *y* t'_2, trazadas desde ***P'*** a la circunferencia ***c'***, tienen como figuras inversas las circunferencias t_1 *y* t_2 que, siendo tangentes a la circunferencia ***c***, pasan por el punto ***Q*** (centro de inversión) y por ***P***, inverso de ***P'***.
- Los puntos de tangencia T_1 *y* T_2 de la circunferencia ***c*** con las circunferencias solución son inversos de los de tangencia T'_1 *y* T'_2 de las rectas t'_1 *y* t'_2, respectivamente, con la circunferencia ***c'*** inversa de la ***c*** dada.

  El esquema conceptual que se adjunta *(fig. 7.1)* muestra la mecánica del proceso de inversión empleado para resolver el ejercicio. Invertir los datos (circunferencia ***c*** y puntos ***P*** *y* ***Q***) facilita el planteamiento inicial: supone trazar rectas tangentes a circunferencias, en vez de trazar circunferencias tangentes a otras circunferencias (datos) y, en consecuencia, conseguir precisión en el trazado de la solución final.

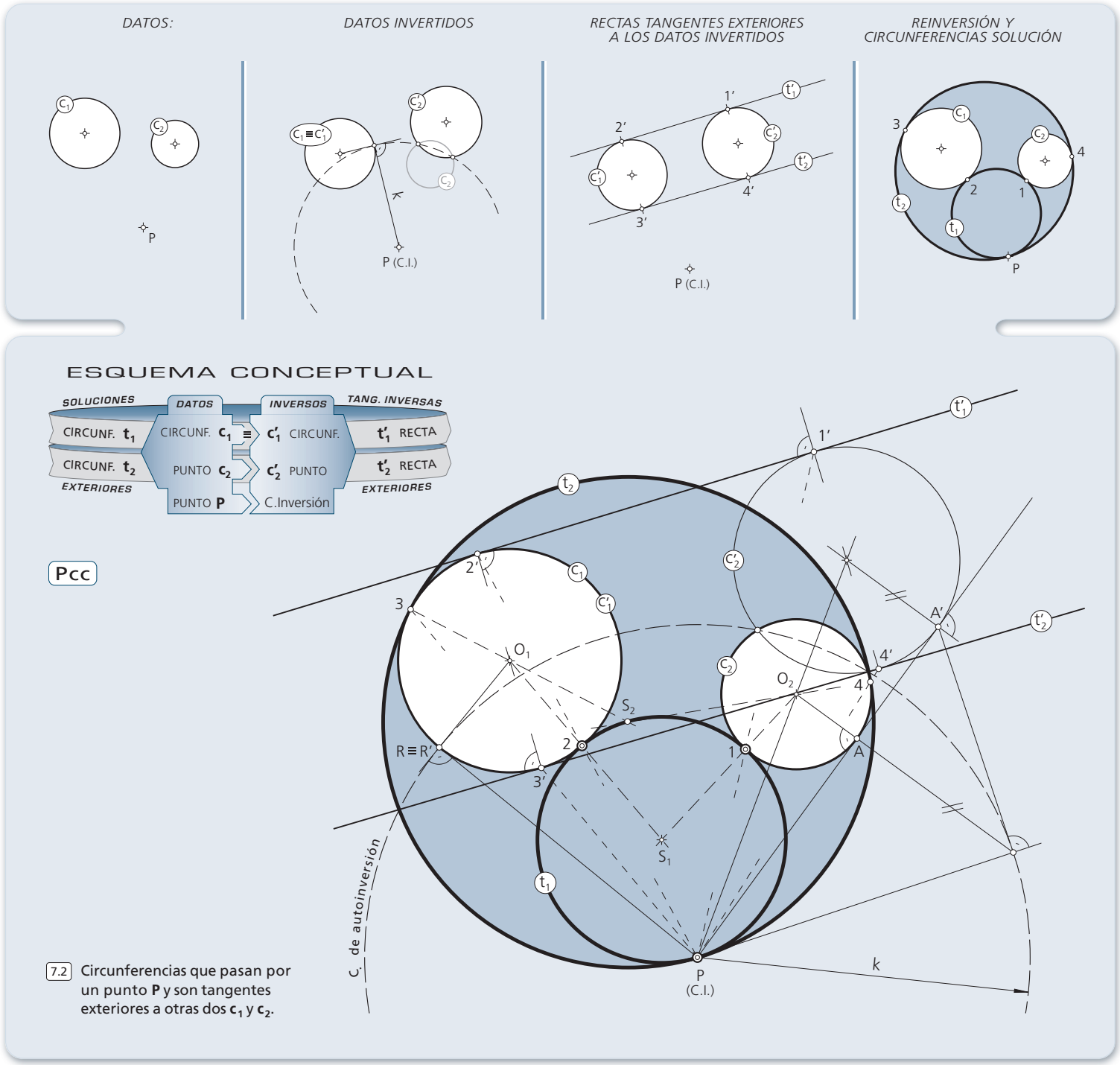


7.1 Circunferencias que pasan por dos puntos (**P** y **Q**) y son tangentes a otra circunferencia **c**.

7.2 Circunferencias que pasan por un punto *(P)* y son tangentes a otras dos, c_1 y c_2.

- Se considera como centro de inversión el punto *P* y se toma como radio de la circunferencia de autoinversión el segmento de tangente trazado desde *P* a una de las dos circunferencias dadas: en la *fig. 7.2*, el segmento *PR* a la curva c_1. Con ello, la circunferencia c_1 tiene por figura inversa c'_1, es decir, ella misma.
- Se trazan las rectas tangentes a las circunferencias c'_1 y c'_2. Dado que es posible trazar cuatro rectas tangentes a las dos circunferencias (dos exteriores y otras dos interiores), el problema cuenta con cuatro posibles soluciones. En la *fig. 7.2* se han trazado, únicamente, las dos tangentes exteriores, t'_1 y t'_2; lo que trae consigo que sus figuras inversas (circunferencias) sean tangentes exteriores a las circunferencias datos.
- Nótese que los puntos inversos de los *1', 2', 3'* y *4'* de contacto de las rectas tangentes exteriores con las circunferencias c'_1 y c'_2 serán los puntos de tangencia *1, 2, 3* y *4* de las circunferencias t_1 y t_2 (soluciones) con las circunferencias dadas $(c_1$ y $c_2)$, respectivamente.

  El esquema conceptual indicado en la parte inferior, junto al tratamiento gráfico de los elementos que se consideran en cada paso (expuestos en la parte superior), determinan la mejor síntesis de clarificación al proceso seguido.



7.2 Circunferencias que pasan por un punto **P** y son tangentes exteriores a otras dos $\mathbf{c_1}$ y $\mathbf{c_2}$.

CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS INVERSAS

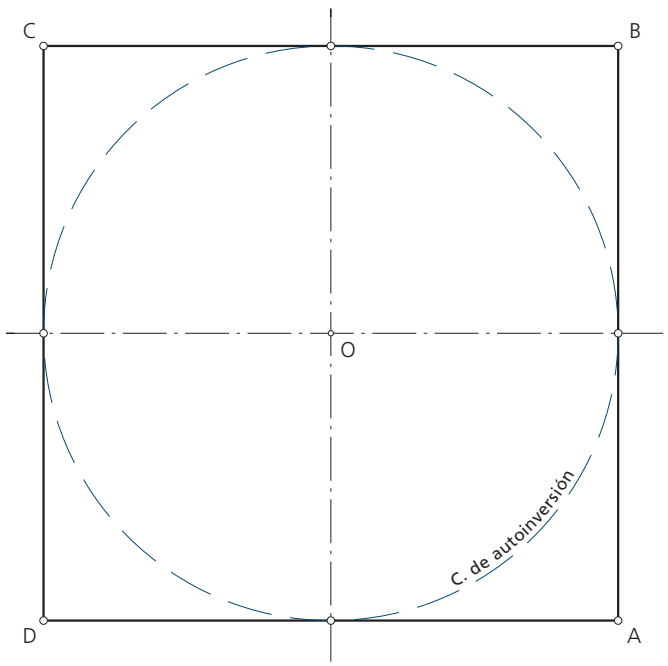
1. Dibuja la FIGURA INVERSA del cuadrado **ABCD**, sabiendo que su circunferencia inscrita es la de autoinversión en la transformación geométrica que se propone.

2. Dibuja la FIGURA INVERSA de la superficie cuadrada **ABCD**, sabiendo que su circunferencia circunscrita es la de autoinversión en la transformación geométrica planteada. Raya o colorea la superficie inversa del interior del cuadrado **ABCD**.

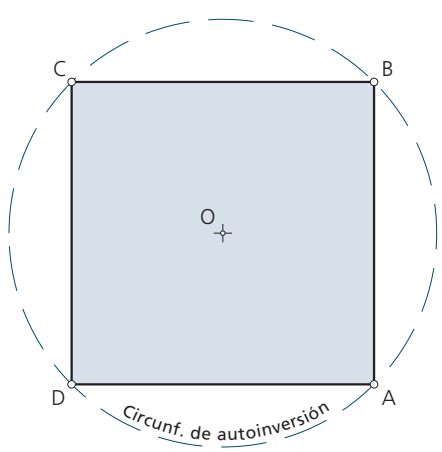
3. Traza la FIGURA INVERSA del semicírculo dado, conociendo el centro **O** de la transformación geométrica y un par de puntos inversos **P** y **P'**. Razona la respuesta, dejando en línea fina todas las construcciones auxiliares.

nombre y apellidos		
nº	curso/grupo	fecha

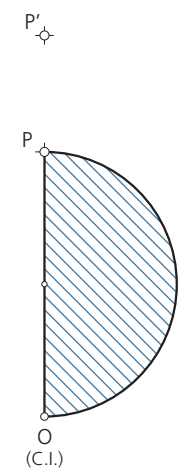
1



2



3



CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS INVERSAS

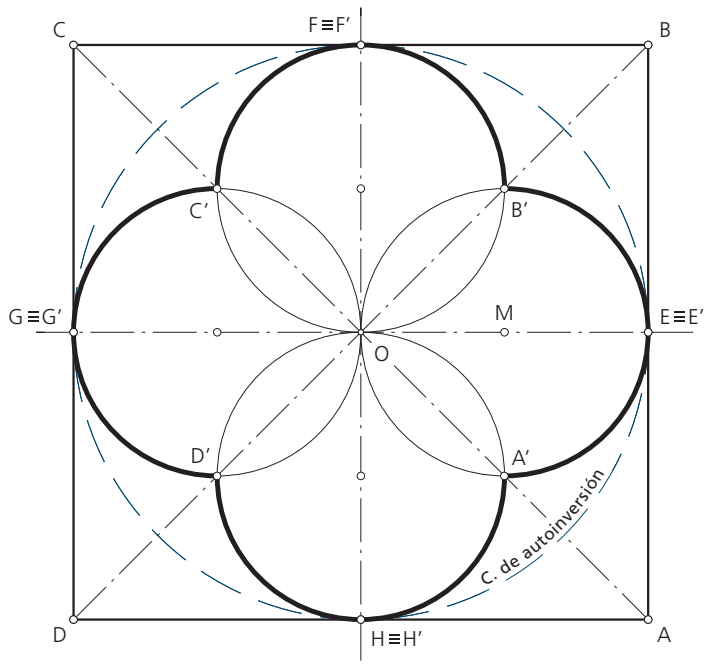
1. Dibuja la FIGURA INVERSA del cuadrado **ABCD**, sabiendo que su circunferencia inscrita es la de autoinversión en la transformación geométrica que se propone.

2. Dibuja la FIGURA INVERSA de la superficie cuadrada **ABCD**, sabiendo que su circunferencia circunscrita es la de autoinversión en la transformación geométrica planteada. Raya o colorea la superficie inversa del interior del cuadrado **ABCD**.

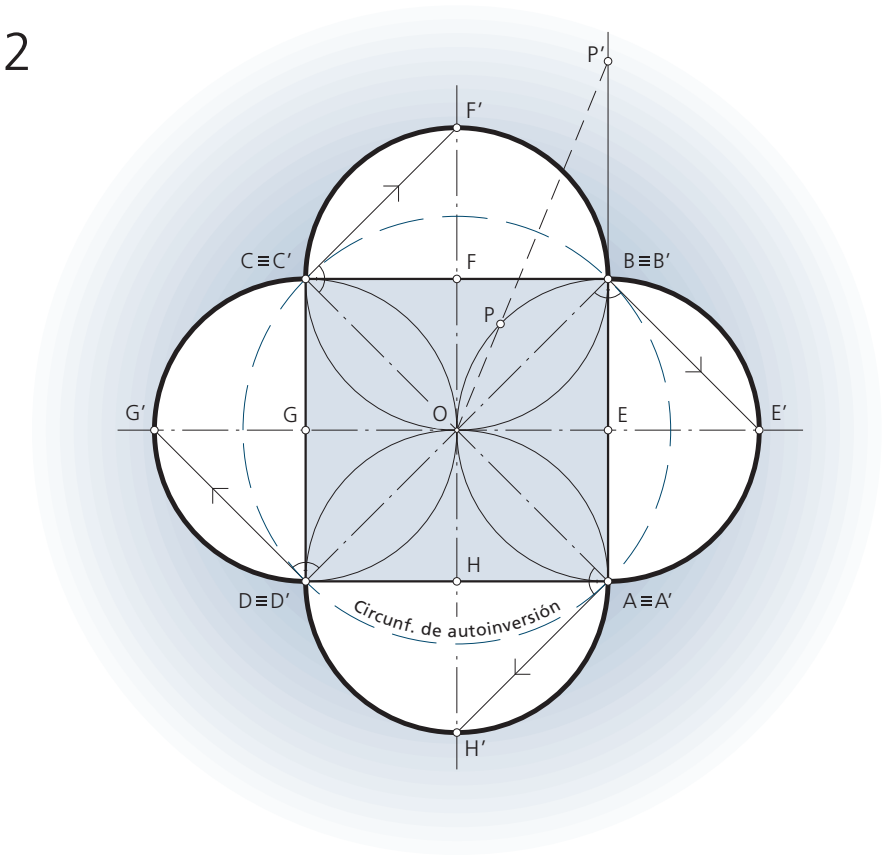
3. Traza la FIGURA INVERSA del semicírculo dado, conociendo el centro **O** de la transformación geométrica y un par de puntos inversos **P** y **P'**. Razona la respuesta, dejando en línea fina todas las construcciones auxiliares.

nombre y apellidos		
nº	curso/grupo	fecha

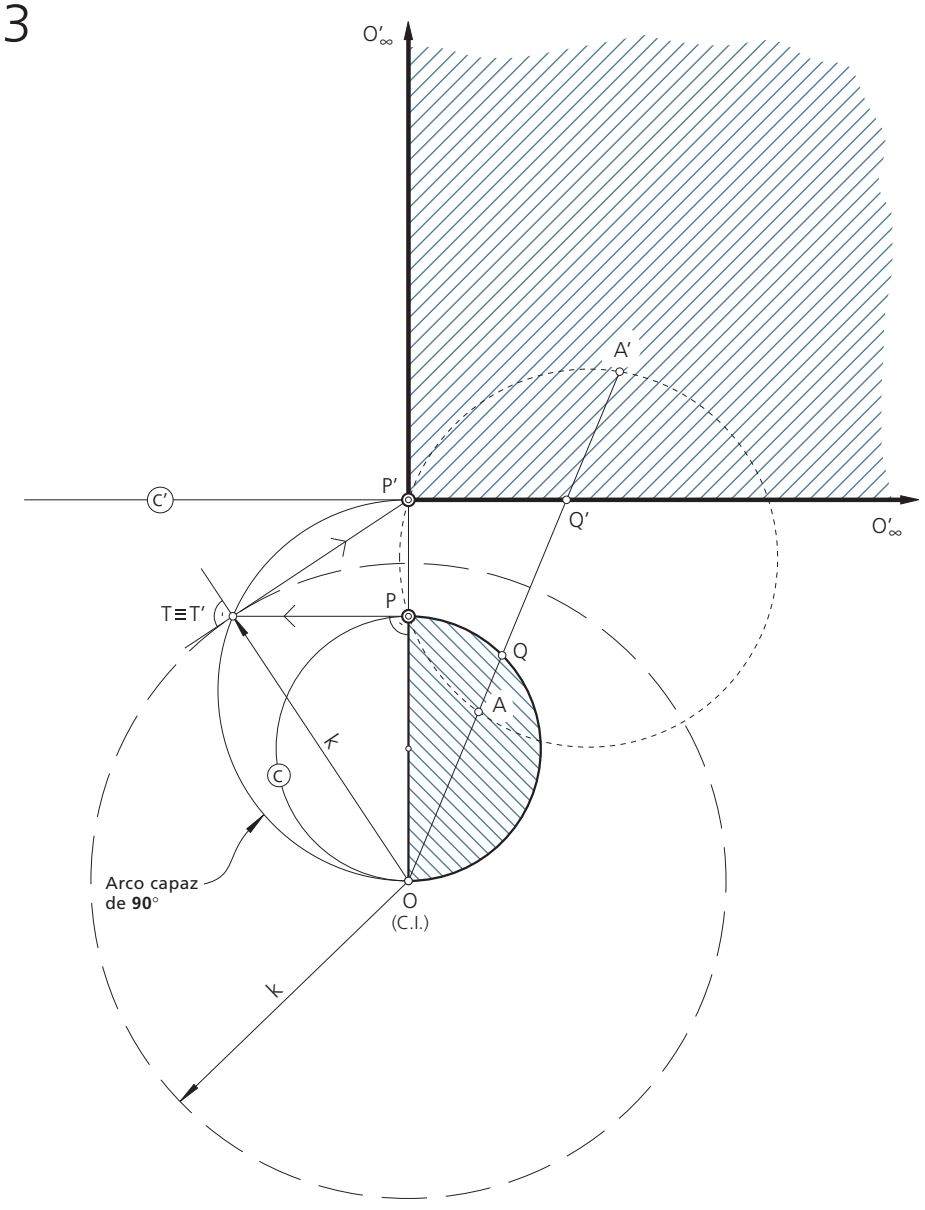
1



2



3



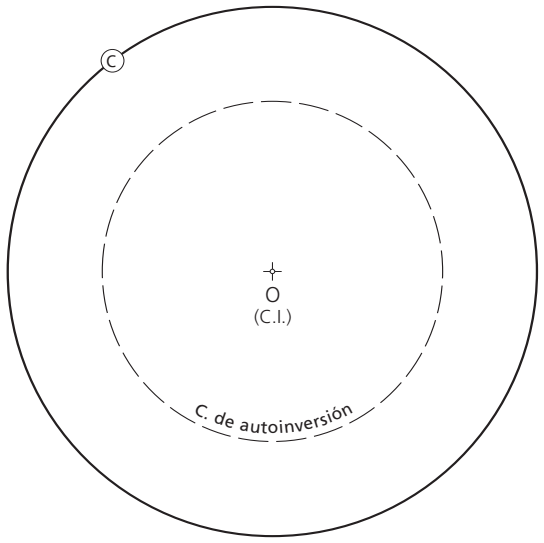
CONSTRUCCIÓN

- Para hallar el radio **k** de la circunferencia de autoinversión se determina la media proporcional o geométrica de los segmentos $\overline{\mathbf{OP}}$ y $\overline{\mathbf{OP'}}$ dados.
- La recta $\overline{\mathbf{OP}}$ es doble porque pasa por el centro de inversión. Los puntos del diámetro $\overline{\mathbf{OP}}$ tienen sus inversos en la semirrecta $\mathbf{P'O'_\infty}$ ya que el inverso de **O** está en el infinito, el inverso de **P** es el dato **P'** y los puntos situados entre ambos, al estar a menor distancia de **O** que **P**, tendrán sus inversos más alejados que **P'** (para que el producto de distancias se mantenga constante: $\overline{\mathbf{OP}} \cdot \overline{\mathbf{OP'}} = \mathbf{k^2}$).
- La semicircunferencia que limita el semicírculo tiene su inversa en una semirrecta **c'**, pues el centro de inversión pertenece a la circunferencia **c**.
- Para determinar la superficie de plano que es inversa al semicírculo dado, y que aparece rayada, basta con considerar un punto **A** y hallar su inverso **A'**. Recuérdese que parejas de puntos inversos son concíclicos.

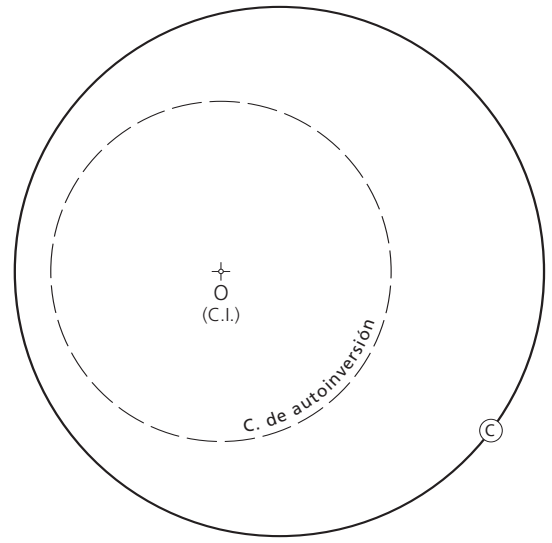
VERIFICACIONES

1. Dibujar la **FIGURA INVERSA** de la circunferencia **c**, **CONCÉNTRICA** a la de autoinversión.
2. Dibujar la **FIGURA INVERSA** de la circunferencia **c**, **EXTERIOR** a la de autoinversión.

1



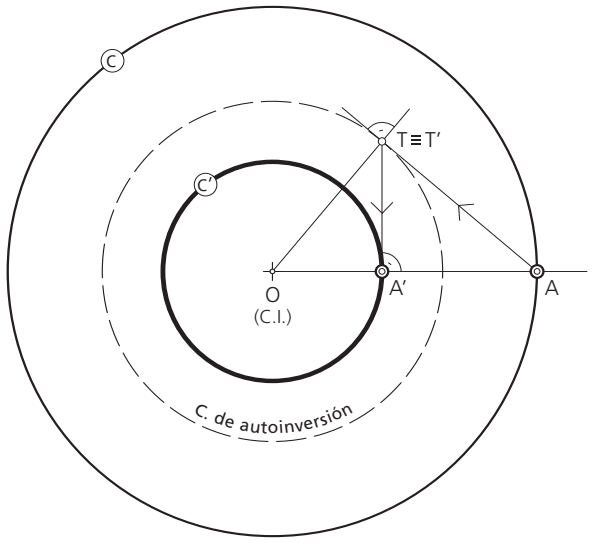
2



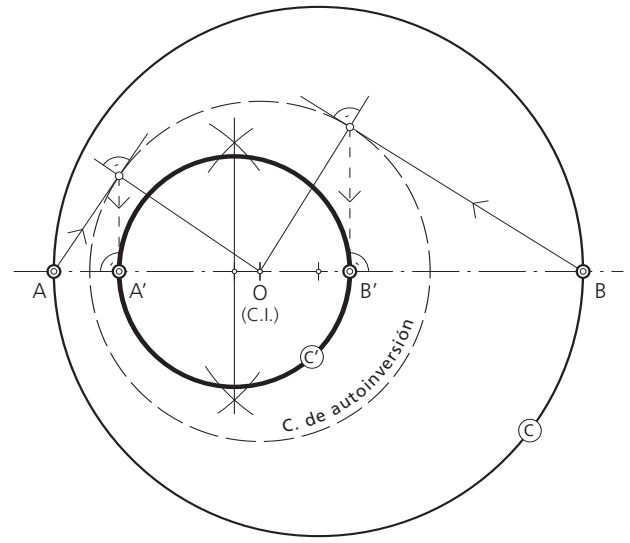
VERIFICACIONES

1. **Dibujar la FIGURA INVERSA de la circunferencia c, CONCÉNTRICA a la de autoinversión.**
2. **Dibujar la FIGURA INVERSA de la circunferencia c, EXTERIOR a la de autoinversión.**

1



2



Comentario

- La figura inversa de una circunferencia concéntrica y exterior a la de autoinversión es otra circunferencia también concéntrica e interior a la de autoinversión.
- Tomando un punto cualquiera **A** de la circunferencia dada y determinando su inverso se halla la magnitud $\overline{\mathbf{OA'}}$ que determina el radio de la circunferencia solución.

Comentario

- La figura inversa de una circunferencia exterior a la de autoinversión es otra circunferencia interior a la de autoinversión.
- Los puntos inversos de los extremos de un diámetro cualquiera de la circunferencia dada, determinan el diámetro de la solución. Así, los puntos **A'** y **B'**, inversos de los extremos **A** y **B**, son los extremos del diámetro de la circunferencia solución.

Comentario a la Construcción del Ejercicio de la Propuesta 1

- Los puntos de tangencia del polígono con la circunferencia de autoinversión son dobles (**E ≡ E'**, **F ≡ F'**, **G ≡ G'** y **H ≡ H'**) y los lados del mismo pueden considerarse como rectas que no pasan por el centro de inversión **O**.
- Por ello, las figuras inversas de los lados del cuadrado son circunferencias que sí pasan por el centro de inversión **O**: es el caso de la circunferencia de centro el punto **M**, punto medio de $\overline{\mathbf{EO}}$, que corta a las diagonales $\overline{\mathbf{OA}}$ y $\overline{\mathbf{OB}}$ en los puntos **A'** y **B'**, respectivamente.
- La figura inversa del cuadrado estará formada por cuatro arcos de circunferencia, secantes entre sí, e inversos de los lados respectivos.

Comentario a la Construcción del Ejercicio de la Propuesta 2

- En este caso, los puntos vértices del cuadrado son puntos dobles por pertenecer a la circunferencia de autoinversión.
- Las inversas de los lados, al ser rectas que no pasan por el centro de inversión, serán circunferencias que sí pasan por él y por los puntos dobles **A ≡ A'**, **B ≡ B'**, **C ≡ C'** y **D ≡ D'**.
- La figura inversa del cuadrado **ABCD**, como en el caso anterior, está formado por cuatro porciones de circunferencias (semicircunferencias), inversas respectivamente de sus lados; secantes entre sí por los inversos de sus vértices.
- La superficie inversa del cuadrado es la exterior de las porciones inversas. Así, el punto **P** (interior) tiene como inverso el **P'** (superficie exterior).

CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR UN PUNTO Y SON TANGENTES A OTRAS DOS DADAS (Pcc)

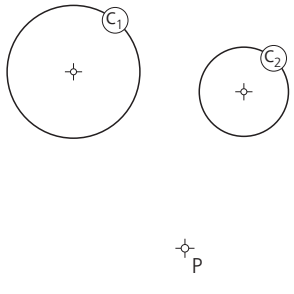
Traza, empleando la inversión como transformación geométrica idónea, las **CIRCUNFERENCIAS** que pasando por el punto exterior **P**, sean **TANGENTES INTERIORES** a las circunferencias $\mathbf{c_1}$ y $\mathbf{c_2}$ de centros $\mathbf{O_1}$ y $\mathbf{O_2}$ respectivamente.

NOTA.- Las circunferencias soluciones que se piden, juntamente con las resueltas en el *apartado 7.2* de teoría, complementan las cuatro soluciones que pueden trazarse; esto es, las cuatro **CIRCUNFERENCIAS TANGENTES** a otras dos dadas y que pasan por un punto exterior.

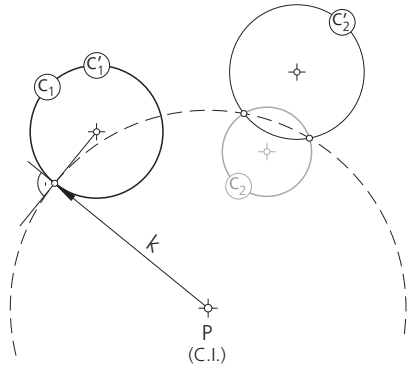
nombre y apellidos		
nº	curso/grupo	fecha

Pcc

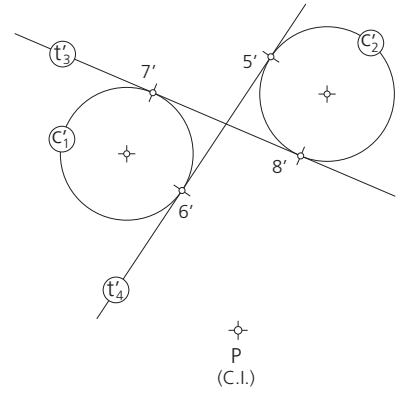
DATOS



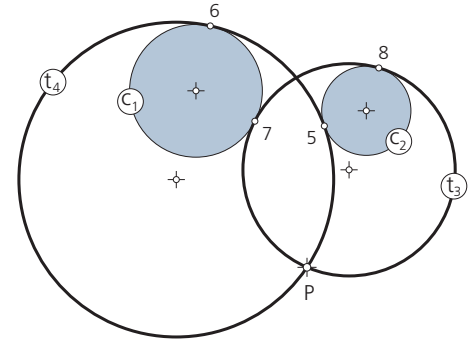
DATOS INVERTIDOS



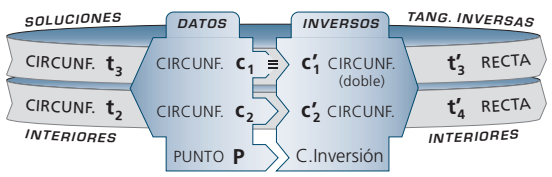
RECTAS TANGENTES INTERIORES A LOS DATOS INVERTIDOS

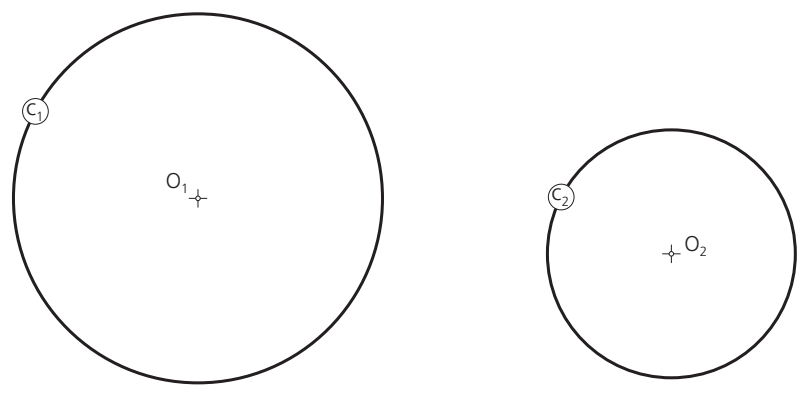


REINVERSIÓN: CIRCUNFERENCIAS SOLUCIÓN



ESQUEMA CONCEPTUAL





P
(C.I.)

Pcc

CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR UN PUNTO Y SON TANGENTES A OTRAS DOS DADAS (Pcc)

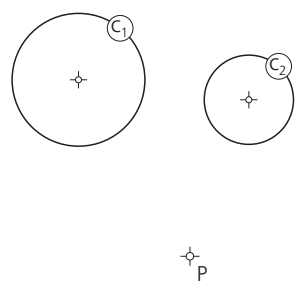
Traza, empleando la inversión como transformación geométrica idónea, las **CIRCUNFERENCIAS** que pasando por el punto exterior **P**, sean **TANGENTES INTERIORES** a las circunferencias $\mathbf{c_1}$ y $\mathbf{c_2}$ de centros $\mathbf{O_1}$ y $\mathbf{O_2}$ respectivamente.

NOTA.- Las circunferencias soluciones que se piden, juntamente con las resueltas en el *apartado 7.2* de teoría, complementan las cuatro soluciones que pueden trazarse; esto es, las cuatro **CIRCUNFERENCIAS TANGENTES** a otras dos dadas y que pasan por un punto exterior.

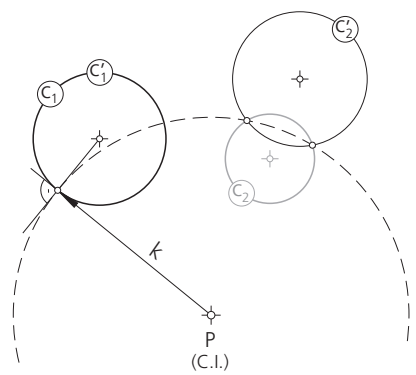
nombre y apellidos		
nº	curso/grupo	fecha

Pcc

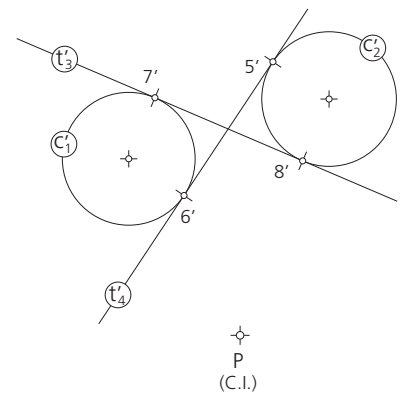
DATOS



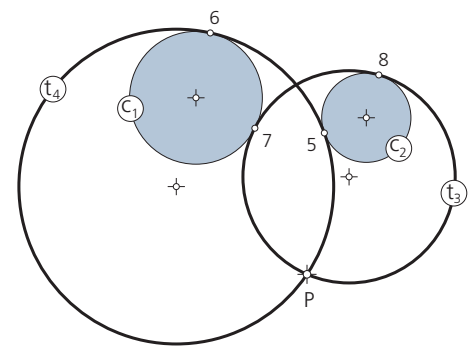
DATOS INVERTIDOS



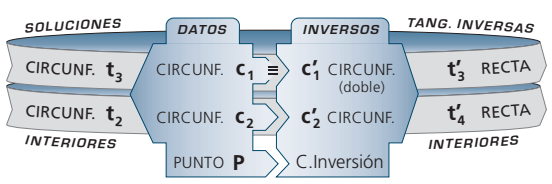
RECTAS TANGENTES INTERIORES A LOS DATOS INVERTIDOS

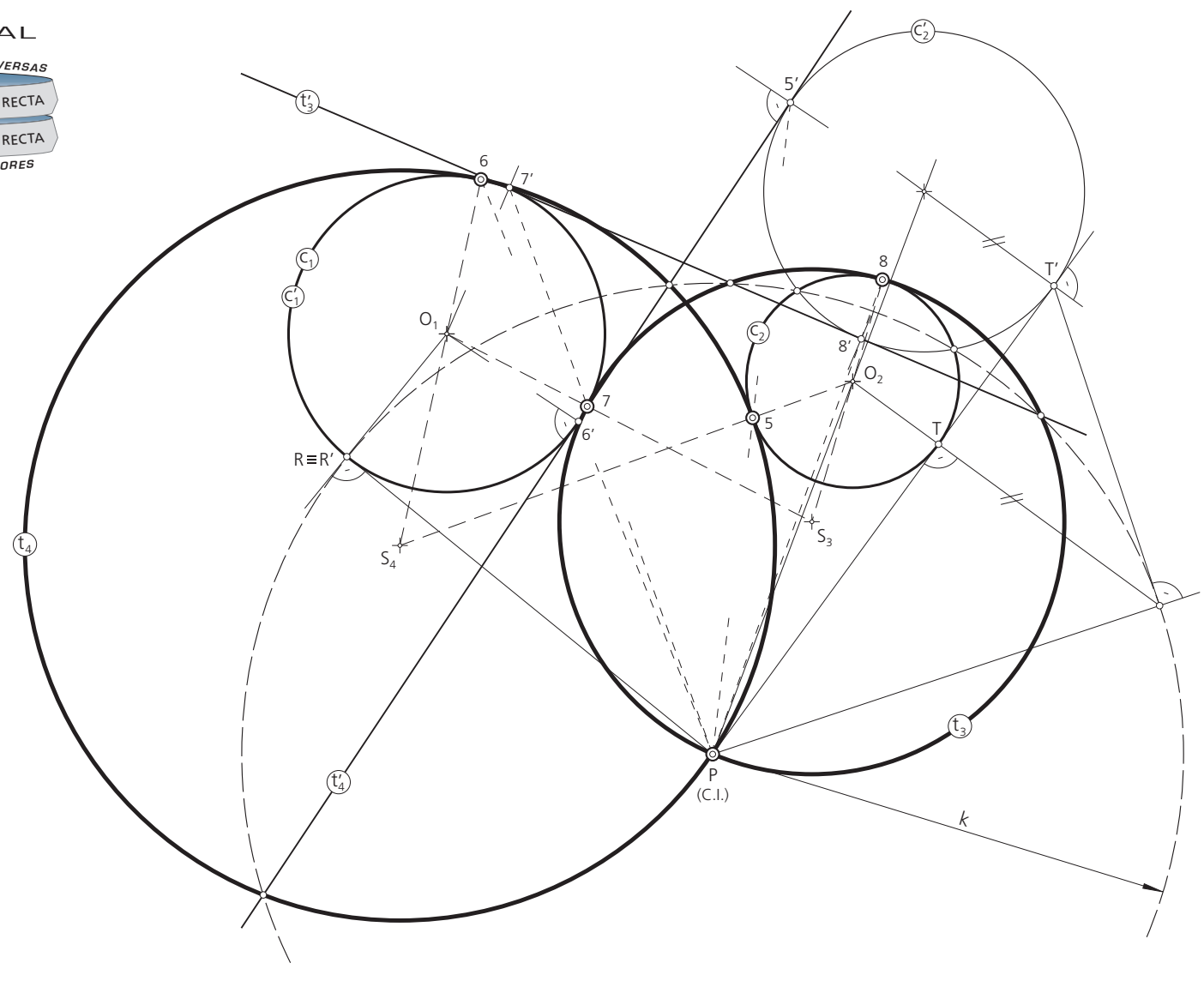


REINVERSIÓN: CIRCUNFERENCIAS SOLUCIÓN



ESQUEMA CONCEPTUAL



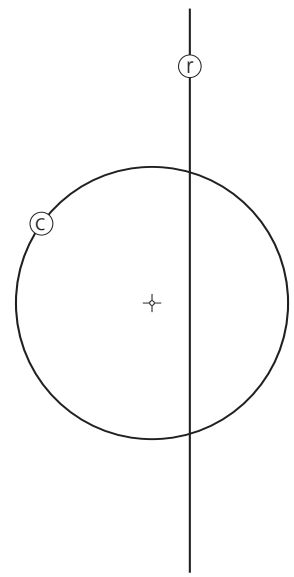


Pcc

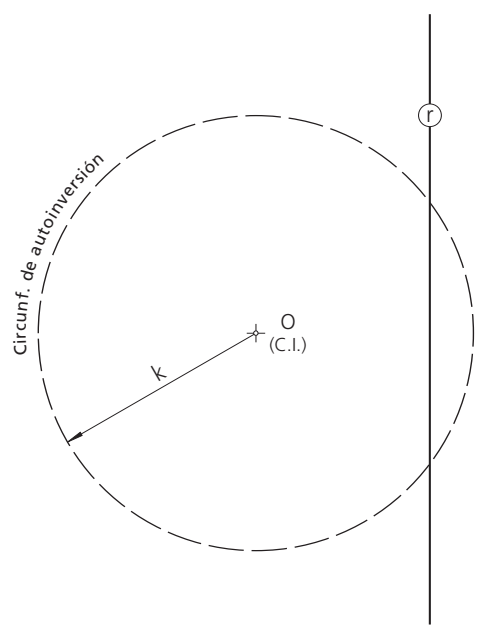
VERIFICACIONES

1. Indicar, gráficamente, una **INVERSIÓN** (centro de inversión y circunferencia de autoinversión) que relacione la circunferencia **c** con la recta **r**.
2. Justificar, gráficamente, que la **FIGURA INVERSA** de la recta **r** que no pasa por el centro de inversión **O**, y potencia $\mathbf{k^2}$, es una circunferencia que sí pasa por dicho punto.

1



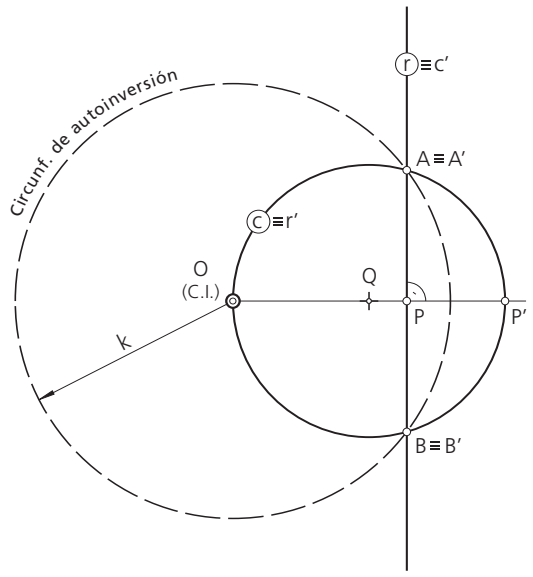
2



VERIFICACIONES

1. **Indicar, gráficamente, una INVERSIÓN (centro de inversión y circunferencia de autoinversión) que relacione la circunferencia c con la recta r.**
2. **Justificar, gráficamente, que la FIGURA INVERSA de la recta r que no pasa por el centro de inversión O, y potencia k^2, es una circunferencia que sí pasa por dicho punto.**

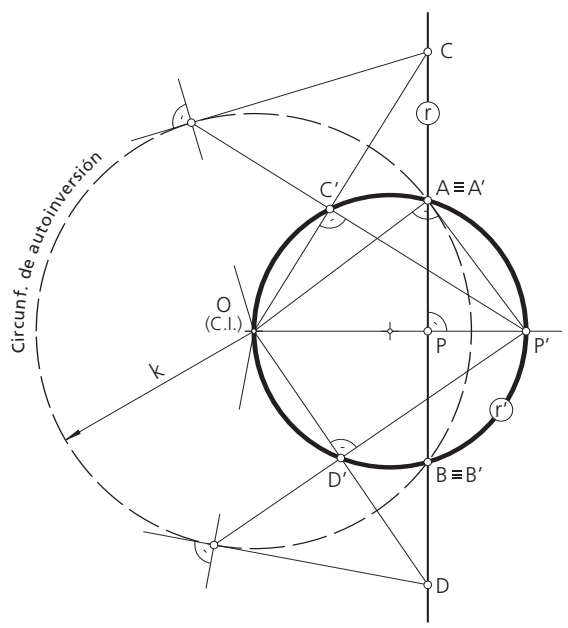
1



COMENTARIO

- Los puntos **A** y **B** de la circunferencia **c** y la recta **r** son dobles; por tanto, la circunferencia de autoinversión pasará por ellos.
- Dado que la circunferencia **c** y la recta **r** son figuras inversas, el centro de inversión **O** se encontrará en cualquiera de los extremos del diámetro de la circunferencia **c**, perpendicular a la recta **r**. En la figura, el diámetro $\overline{OQ}$, donde se ha considerado el punto extremo **O** como centro de la inversión que transforma la recta **r** en la circunferencia **c**, o viceversa.
- La circunferencia de autoinversión tendrá por centro **O** y por radio $\overline{OA} = \overline{OB} = k$.

2



COMENTARIO

- En un principio se halla el inverso del punto **P** (pie de la perpendicular trazada a la recta **r** desde el centro de inversión **O**), resultando el punto **P'**. Como se recordará, la construcción de puntos inversos se fundamenta en el antiparalelismo existente entre las rectas definidas por las parejas de puntos inversos **A - P** y **A' - P'** respecto a los rayos **OA** y **OP**, formando ángulos de 90°.
- Aplicando el mismo principio a la obtención del inverso de otros puntos, tales como **C** y **D**, observamos el cumplimiento del antiparalelismo: las parejas de puntos inversos **P - C** y **P' - C'** y los rayos **OP** y **OC**, o bien, las parejas **P - D** y **P' - D'** con los rayos **OP** y **OD**; lo que trae consigo la formación de triángulos rectángulos en **A'**, **C'**, **D'**, etc.
- Al análisis de lo dicho y visto se desprende que los transformados de los puntos de la recta **r** se encuentran en posiciones desde las que se aprecia el segmento $\overline{OP'}$ bajo un ángulo de 90°; es decir, se encuentran en el arco capaz de 90° y, por tanto, se posicionan en una circunferencia de diámetro el segmento $\overline{OP'}$.

CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR UN PUNTO Y SON TANGENTES A OTRA Y A UNA RECTA (Prc)

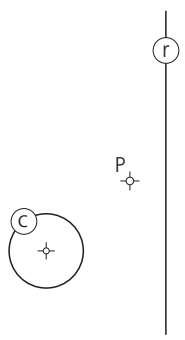
Dibuja, empleando el **MÉTODO DE INVERSIÓN**, las circunferencias que, pasando por el punto **P** sean tangentes a la recta **r** y a la circunferencia **c**, de centro **O**.

NOTA.- De las cuatro posibles soluciones, considerar, únicamente, aquellas circunferencias solución que queden **EXTERIORES** a la circunferencia dada.

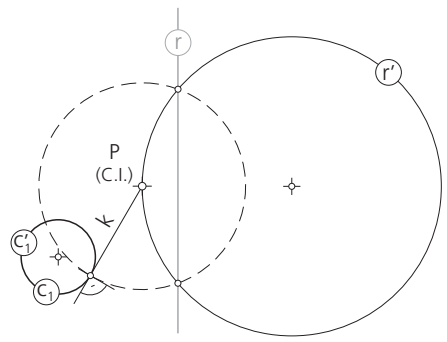
nombre y apellidos		
nº	curso/grupo	fecha

Prc

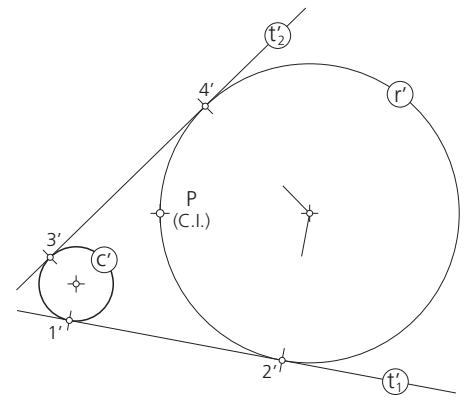
DATOS



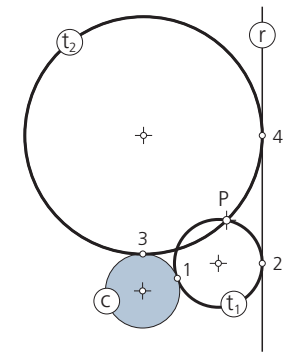
DATOS INVERTIDOS



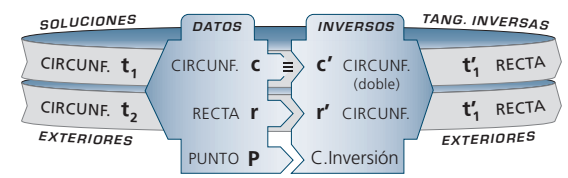
RECTAS TANGENTES EXTERIORES A LOS DATOS INVERTIDOS

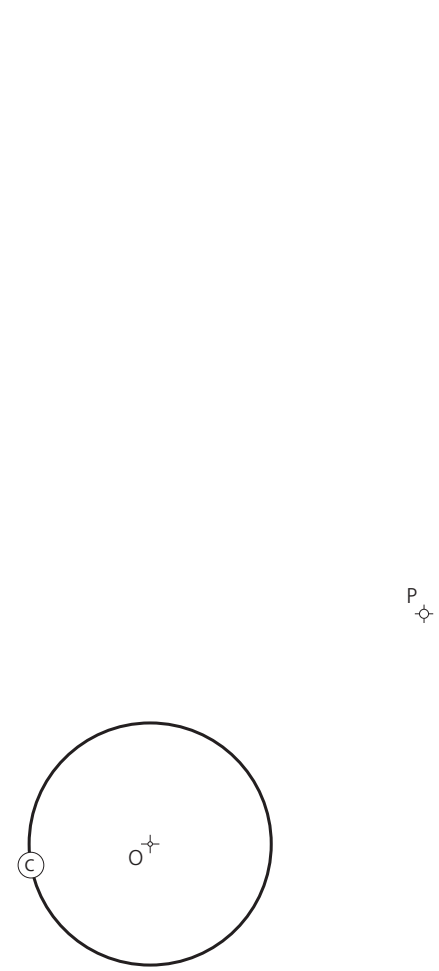


REINVERSIÓN: CIRCUNFERENCIAS SOLUCIÓN



ESQUEMA CONCEPTUAL





Prc

CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR UN PUNTO Y SON TANGENTES A OTRA Y A UNA RECTA (Prc)

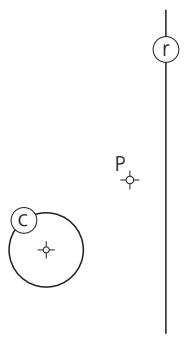
Dibuja, empleando el **MÉTODO DE INVERSIÓN**, las circunferencias que, pasando por el punto **P** sean tangentes a la recta **r** y a la circunferencia **c**, de centro **O**.

NOTA.- De las cuatro posibles soluciones, considerar, únicamente, aquellas circunferencias solución que queden **EXTERIORES** a la circunferencia dada.

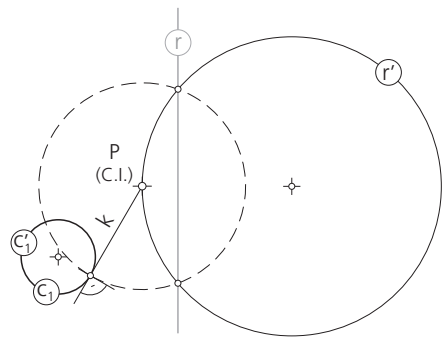
nombre y apellidos		
nº	curso/grupo	fecha

Prc

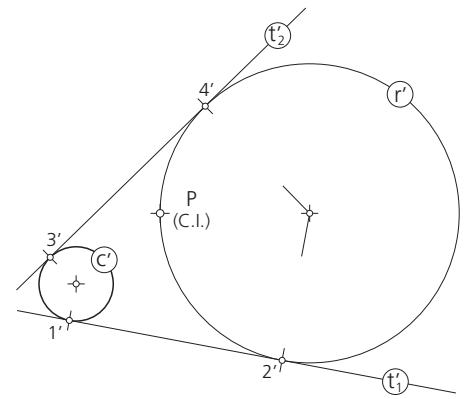
DATOS



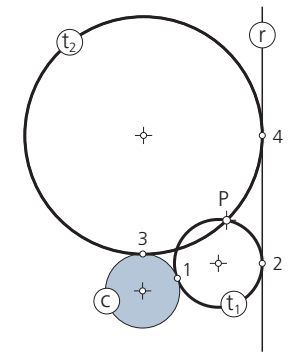
DATOS INVERTIDOS



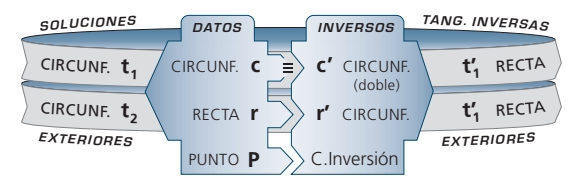
RECTAS TANGENTES EXTERIORES A LOS DATOS INVERTIDOS

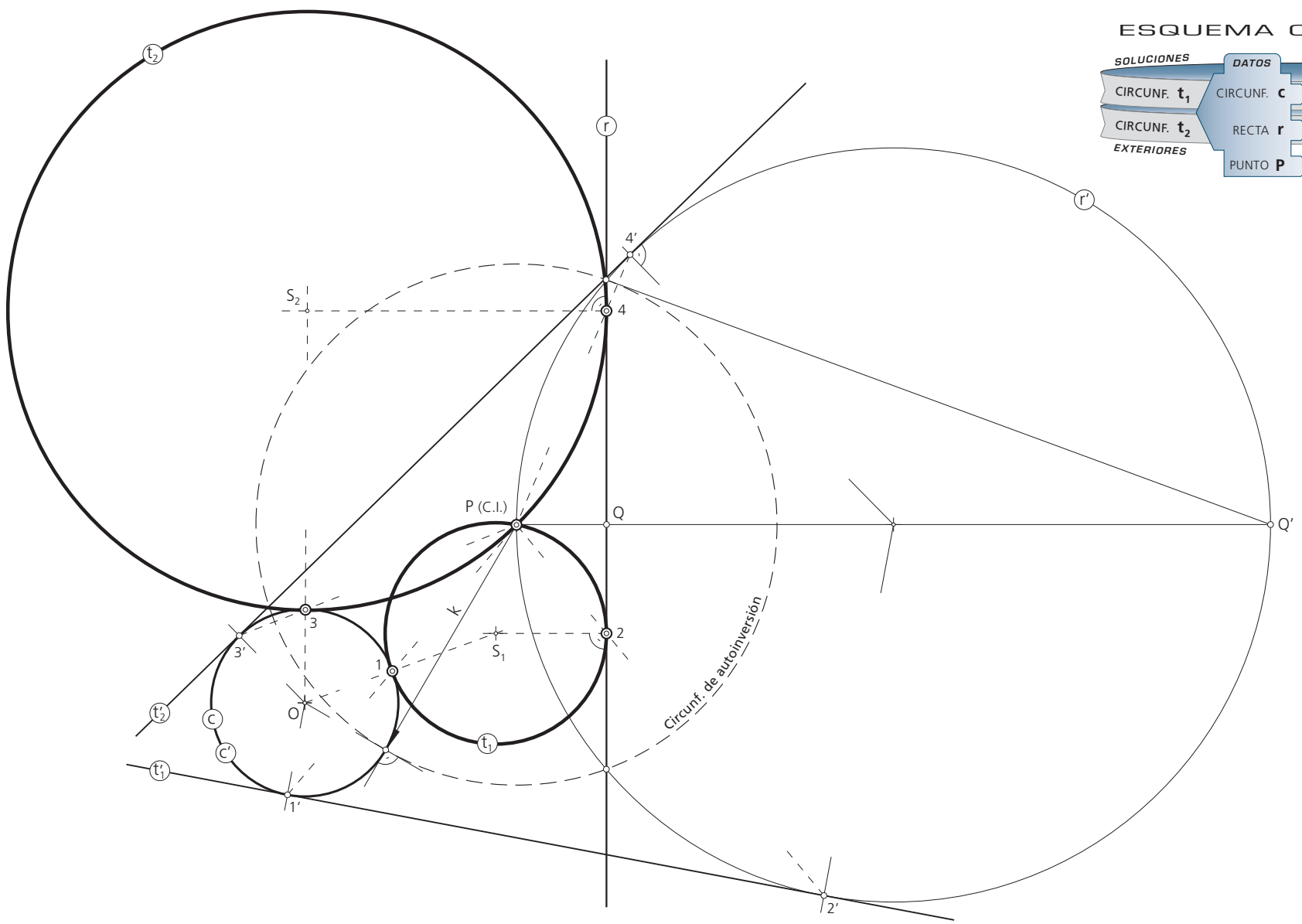


REINVERSIÓN: CIRCUNFERENCIAS SOLUCIÓN



ESQUEMA CONCEPTUAL





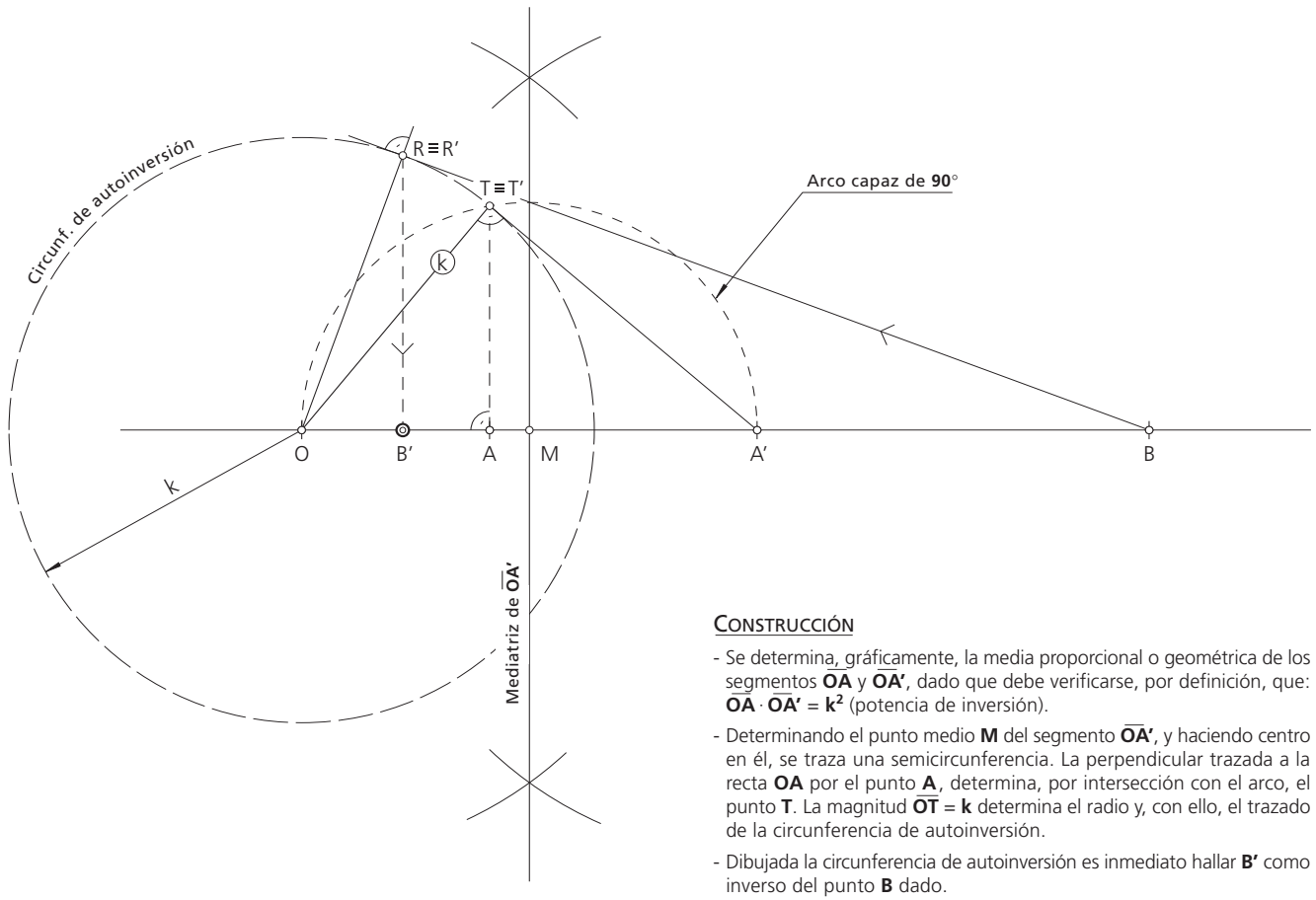
Prc

VERIFICACIÓN

En una **INVERSIÓN** definida por su centro **O** y el par de puntos inversos **A** - **A'**, hallar el punto **B'** inverso del punto **B**, alineado con **A**.

VERIFICACIÓN

En una INVERSIÓN definida por su centro O y el par de puntos inversos A - A', hallar el punto B' inverso del punto B, alineado con A.



CONSTRUCCIÓN

- Se determina, gráficamente, la media proporcional o geométrica de los segmentos **OA** y **OA'**, dado que debe verificarse, por definición, que: $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = k^2$ (potencia de inversión).
- Determinando el punto medio **M** del segmento **OA'**, y haciendo centro en él, se traza una semicircunferencia. La perpendicular trazada a la recta **OA** por el punto **A**, determina, por intersección con el arco, el punto **T**. La magnitud $\overline{OT} = k$ determina el radio y, con ello, el trazado de la circunferencia de autoinversión.
- Dibujada la circunferencia de autoinversión es inmediato hallar **B'** como inverso del punto **B** dado.

CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A OTRAS TRES EXTERIORES DE RADIOS DIFERENTES (ccc)

Dibuja, empleando el método de inversión, las **CIRCUNFERENCIAS TANGENTES INTERIOR** y **EXTERIOR** a las tres circunferencias dadas $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ y $\mathbf{c_3}$, de centros $\mathbf{O_1}$, $\mathbf{O_2}$ y $\mathbf{O_3}$, respectivamente.

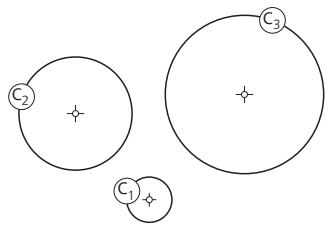
NOTA.- Aplicar el procedimiento de dilataciones, a fin de reducir la circunferencia de menor radio a un punto (su centro $\mathbf{O_1}$), que se utilizará como centro de inversión para resolver la transformación geométrica.

En el caso general se obtienen ocho soluciones. Téngase en cuenta que únicamente se pide trazar las circunferencias solución que **INSCRIBEN** o **CIRCUNSCRIBEN** a las tres circunferencias dadas. Las otras seis soluciones posibles se muestran esquematizadas en la parte izquierda de la hoja lo que facilita un rápido análisis gráfico al lector.

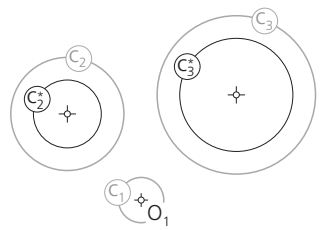
nombre y apellidos		
nº	curso/grupo	fecha

ccc

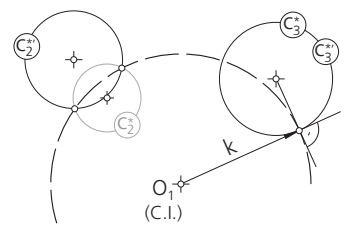
DATOS



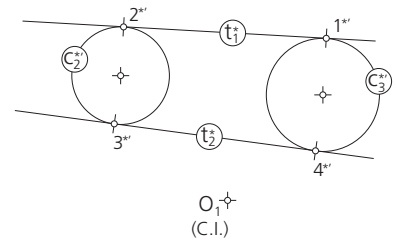
DILATACIÓN NEGATIVA DE LOS DATOS



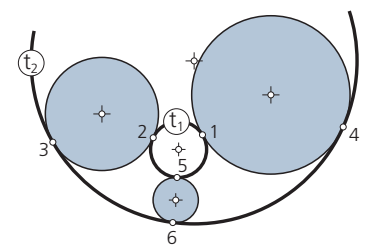
DATOS INVERTIDOS



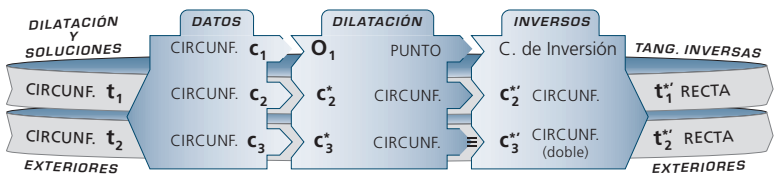
RECTAS TANGENTES EXTERIORES A LOS DATOS INVERTIDOS



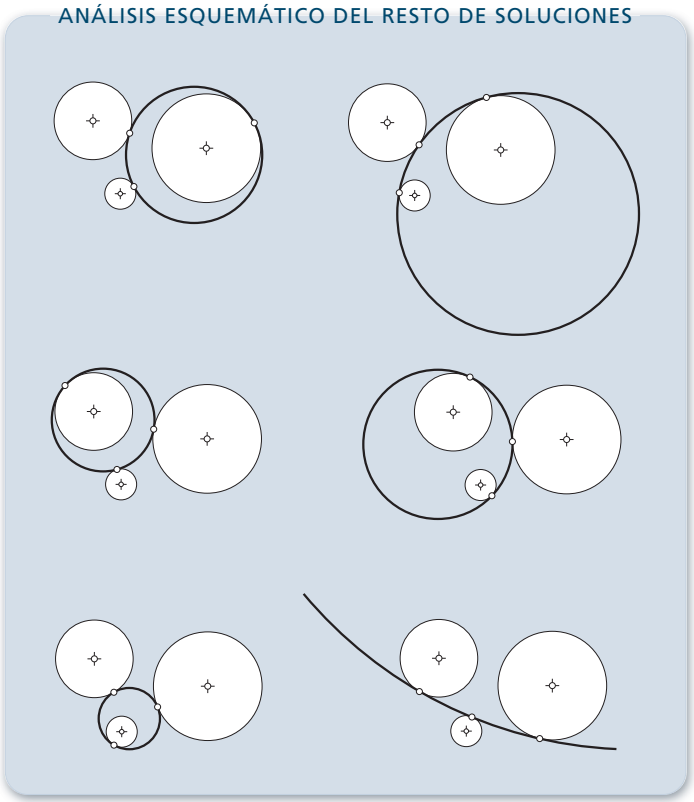
REINVERSIÓN, DILATACIÓN Y CIRCUNFERENCIAS SOLUCIÓN

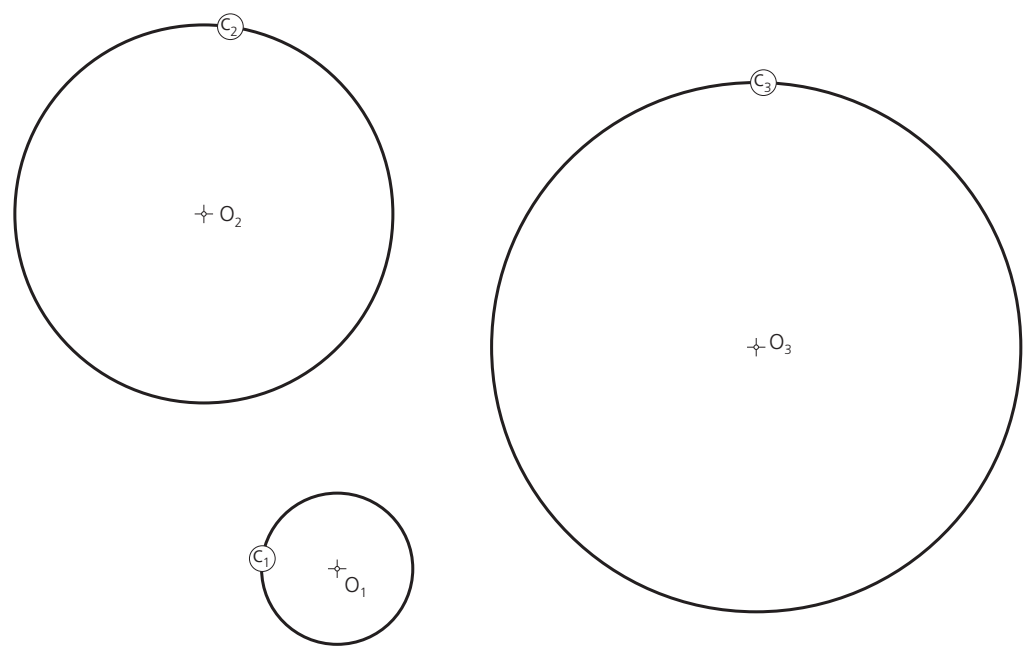


ESQUEMA CONCEPTUAL



ANÁLISIS ESQUEMÁTICO DEL RESTO DE SOLUCIONES





CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A OTRAS TRES EXTERIORES DE RADIOS DIFERENTES (ccc)

Dibuja, empleando el método de inversión, las **CIRCUNFERENCIAS TANGENTES INTERIOR** y **EXTERIOR** a las tres circunferencias dadas $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ y $\mathbf{c_3}$, de centros $\mathbf{O_1}$, $\mathbf{O_2}$ y $\mathbf{O_3}$, respectivamente.

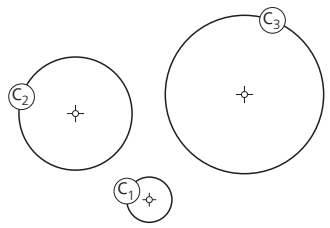
NOTA.- Aplicar el procedimiento de dilataciones, a fin de reducir la circunferencia de menor radio a un punto (su centro $\mathbf{O_1}$), que se utilizará como centro de inversión para resolver la transformación geométrica.

En el caso general se obtienen ocho soluciones. Téngase en cuenta que únicamente se pide trazar las circunferencias solución que **INSCRIBEN** o **CIRCUNSCRIBEN** a las tres circunferencias dadas. Las otras seis soluciones posibles se muestran esquematizadas en la parte izquierda de la hoja lo que facilita un rápido análisis gráfico al lector.

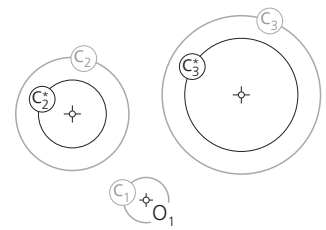
nombre y apellidos		
nº	curso/grupo	fecha

CCC

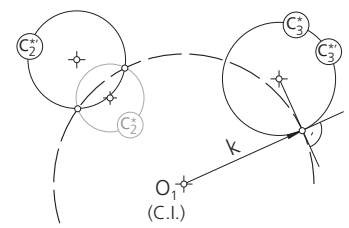
DATOS



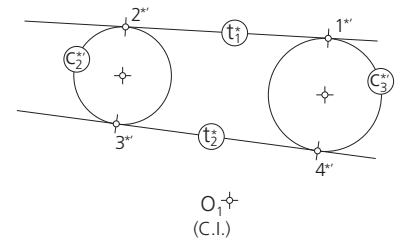
DILATACIÓN NEGATIVA DE LOS DATOS



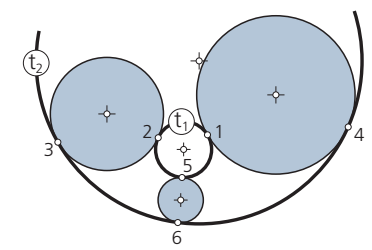
DATOS INVERTIDOS



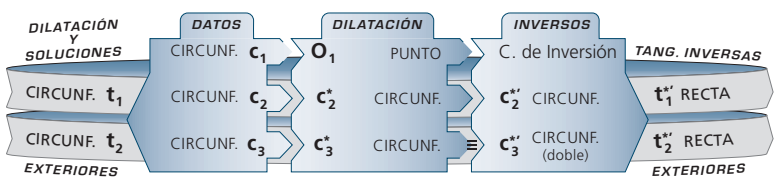
RECTAS TANGENTES EXTERIORES A LOS DATOS INVERTIDOS



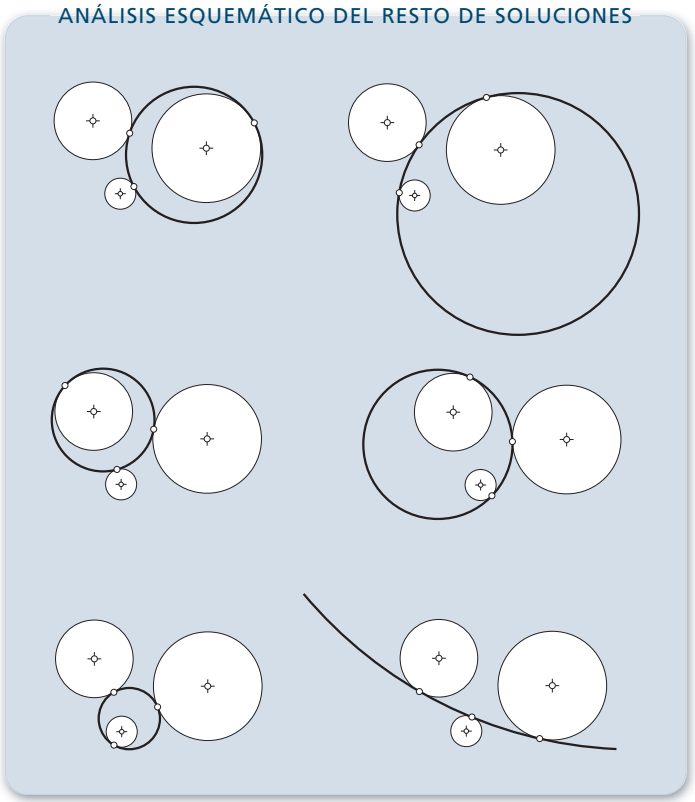
REINVERSIÓN, DILATACIÓN Y CIRCUNFERENCIAS SOLUCIÓN

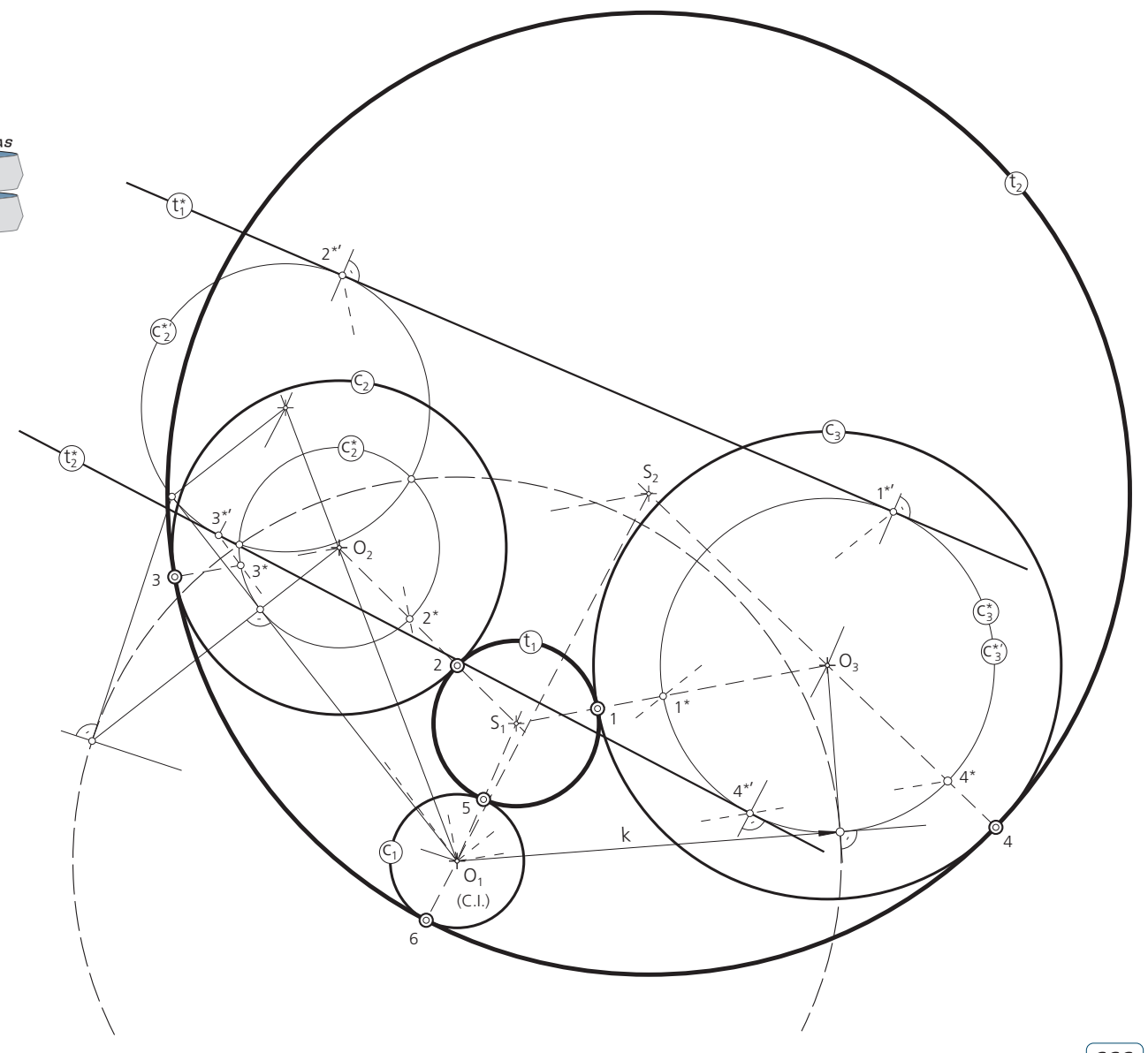


ESQUEMA CONCEPTUAL



ANÁLISIS ESQUEMÁTICO DEL RESTO DE SOLUCIONES





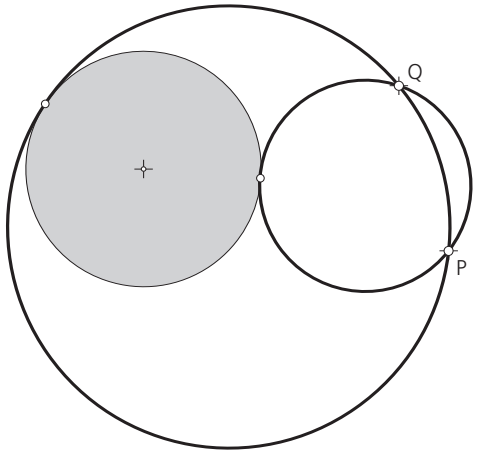
CCC

VERIFICACIÓN

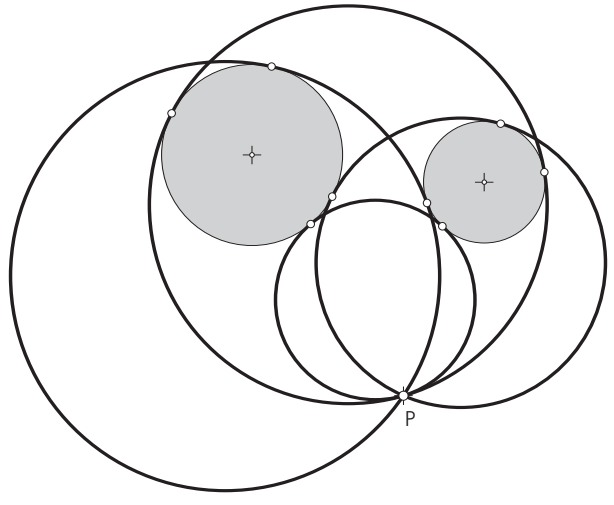
Realiza una sistematización esquemática de los **CUATRO CASOS** de **TANGENCIAS** planteados en esta unidad didáctica.

VERIFICACIÓN

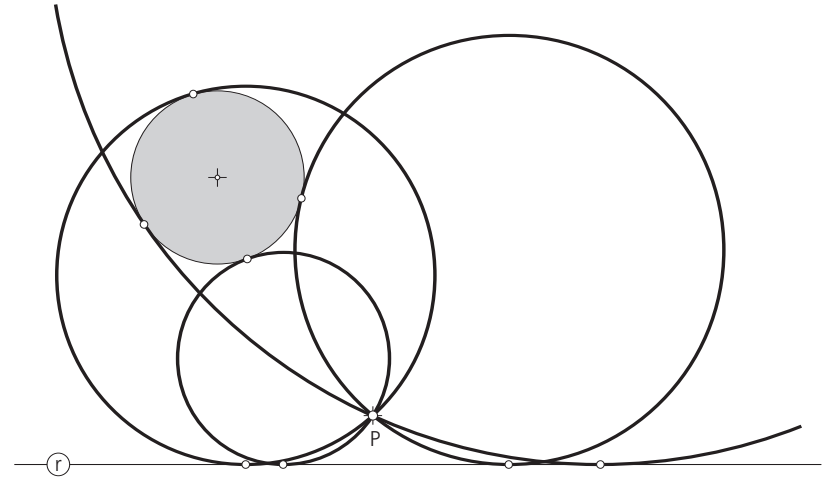
Realiza una sistematización esquemática de los CUATRO CASOS de TANGENCIAS planteados en esta unidad didáctica.



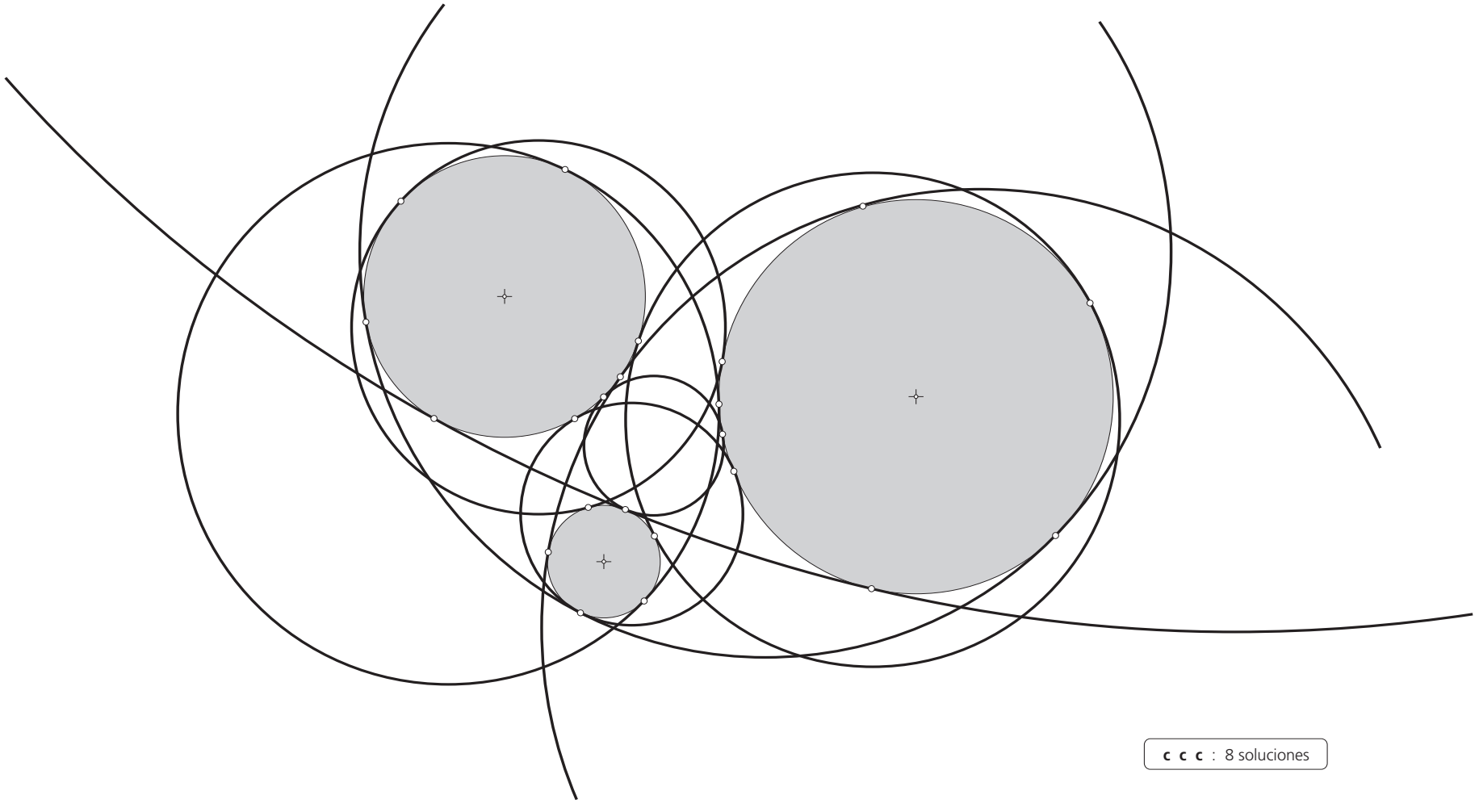
P P c : 2 soluciones



P c c : 4 soluciones



P r c : 4 soluciones



c c c : 8 soluciones