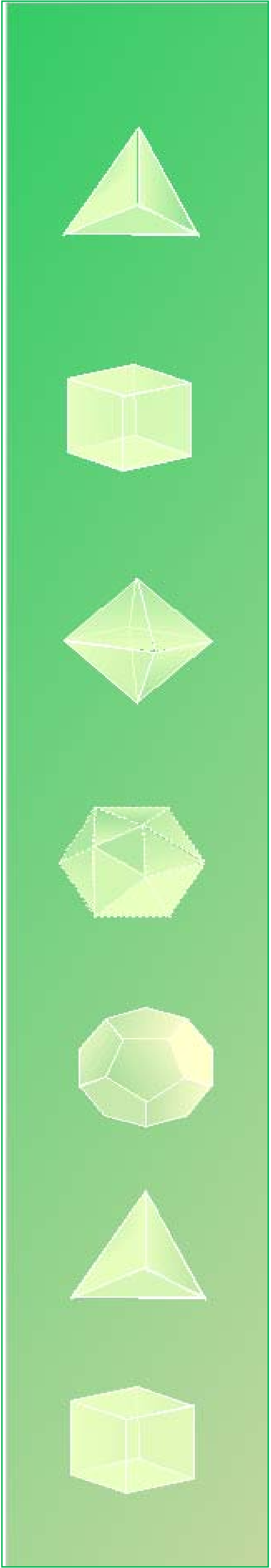


MATEMÁTICAS I: 1º Bachillerato Capítulo 7: Derivadas

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Jorge Muñoz

Revisores: María Molero y Emilio Díaz

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. CONCEPTO DE DERIVADA

1.1. TASA DE VARIACIÓN MEDIA DE UNA FUNCIÓN

1.2. TASA DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA

1.3. DEFINICIÓN DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

1.4. DERIVADA A LA DERECHA Y DERIVADA A LA IZQUIERDA

1.5. FUNCIÓN DERIVADA

2. REGLAS DE DERIVACIÓN

3. APLICACIONES DE LA DERIVADA

3.1. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA. RECTA TANGENTE

3.2. INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA DERIVADA

3.3. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

3.4. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

3.5. OTROS PROBLEMAS

En el siglo XVII, y prácticamente al mismo tiempo, *Newton* y *Leibniz* llegaron al concepto de derivada, y con él al de *Cálculo Diferencial*. Con ello se consideró que todo se podría conocer mediante funciones y sus derivadas. Es lo que se conoce como el *Determinismo Científico*.

Las derivadas se usan en general para conocer la tendencia de una función. Por ejemplo, en mecánica, la posición de un objeto es una función del tiempo, y su tendencia, o su variación respecto de la variable (tiempo) es la velocidad. Conocido el valor de posición de un objeto, la derivada permite calcular su velocidad. Del mismo modo sirven las derivadas para calcular la aceleración cuando tenemos una función tiempo - velocidad.

Por ejemplo: la predicción del tiempo meteorológico no se basa únicamente en el valor de la presión atmosférica en un momento dado, sino que para saber si va a hacer buen o mal tiempo es preciso conocer las variaciones bruscas de la presión. Una variación de la presión de 12 mm no tiene ninguna consecuencia si ocurre en un periodo de tiempo de cinco días, pero sí la tiene si ocurre en sólo 8 horas. Una caída de presión atmosférica que dure más de tres horas y que sea en media superior a 1’3 mm por hora anuncia mal tiempo, y si ya lo hace, continuará haciéndolo. Un aumento de presión atmosférica que dure más de tres horas y que sea en media superior a 1’3 mm por hora anuncia buen tiempo, y si ya lo hace, continuará haciéndolo.

Se utiliza la derivada para determinar la pendiente de la recta tangente de una función en un punto.

Una vez conocida la derivada de una función podemos utilizarla para calcular sus máximos y mínimos, su crecimiento y decrecimiento, lo que a su vez nos permite dibujar su gráfica con mayor precisión.

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

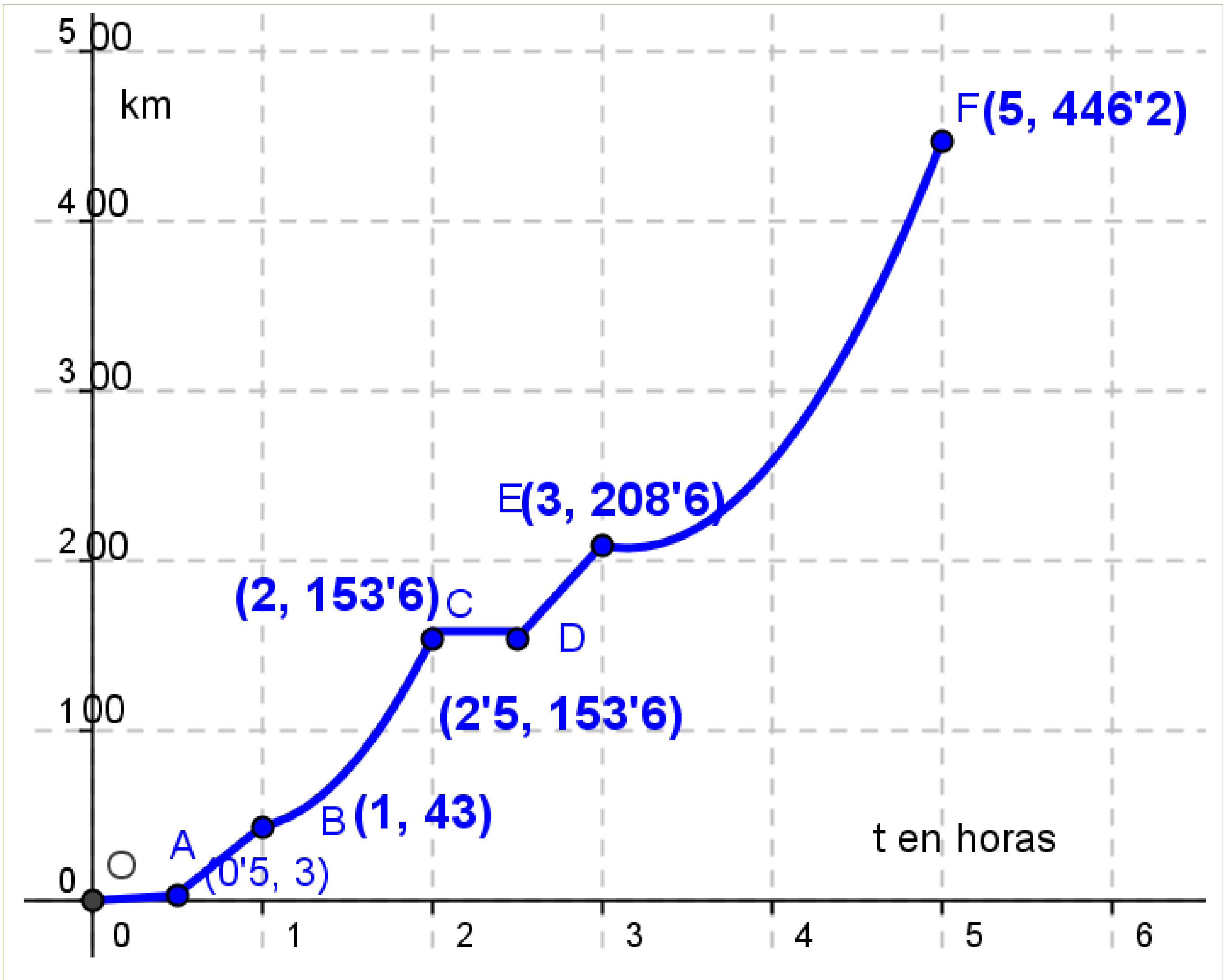
1. CONCEPTO DE DERIVADA

1.1. Tasa de variación media de una función

Actividades de introducción

- *Un viaje*

Jorge y Adela han ido de viaje desde Madrid hacia Alicante. Han salido a las 12 horas. Llevan un aparato que les dice en todo momento cuánto tiempo llevan viajando desde que salieron y los kilómetros que llevan recorridos. Por eso saben que a la hora de haber salido de casa sólo han recorrido 43 kilómetros y que a las 2 horas han recorrido 153'6 kilómetros. Han representado gráficamente la función tiempo (en horas) $\rightarrow$ distancia recorrida (en km). Los tramos *OA*, *AB*, *CD* y *DE* los han representado con segmentos, y los tramos *BC* y *EF* con parábolas.



- ¿Qué distancia han recorrido en total?
- ¿Cuánto han tardado?
- ¿Cuál ha sido la velocidad media del coche durante el viaje?
- ¿Han parado en algún momento? ¿En cuál o en cuáles?

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- ¿Cuánto consideras que tardaron en salir de Madrid hacia la autovía?
- ¿Cuál ha sido la velocidad media entre la primera media hora y una hora? ¿Crees que había mucho tráfico en la autovía?
- ¿Cuál ha sido la velocidad media entre la primera hora y la segunda hora?
- ¿Cuál ha sido la velocidad media entre los instantes 2’5 y 3 horas?
- ¿Cuál ha sido la velocidad media entre los instantes 3 y 5 horas?
- En autovía la velocidad máxima permitida es de 120 km/h, ¿crees que en algún momento se ha sobrepasado? ¿Puedes estar seguro?

En la gráfica podemos ver que se han recorrido unos 450 km. Han sido exactamente 446’2 km. Han tardado 5 horas.

La velocidad media entre los instantes t_1 y t_2 viene dada por el cociente:

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$

luego la velocidad media del viaje ha sido de $\frac{f(5)-f(0)}{5-0}=\frac{446'2-0}{5-0}=89'24$ km/h.

Han ido muy despacio al principio del viaje. Quizás estaban todavía en Madrid y paraban en los semáforos o había atascos. Tardaron una media hora en salir de Madrid. Posteriormente hay una parada larga de media hora a las dos horas de viaje. Quizás pararon a comer.

La velocidad media entre la primera media hora y una hora ha sido de:

$$\frac{f(1)-f(0'5)}{1-0'5}=\frac{43-3}{0'5}=80 \text{ km/h.}$$

Había bastante tráfico en la autovía. Es una velocidad media bastante baja.

La velocidad media entre la primera hora y la segunda hora ha sido de:

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{153'6-43}{1}=110'6 \text{ km/h.}$$

La velocidad media entre los instantes 2’5 y 3 ha sido de:

$$\frac{f(3)-f(2'5)}{3-2'5}=\frac{208'6-153'6}{0'5}=110 \text{ km/h.}$$

La velocidad media entre los instantes 3 y 5 horas ha sido de:

$$\frac{f(5)-f(3)}{5-3}=\frac{446'2-208'6}{2}=118'8 \text{ km/h.}$$

Por el cálculo que hemos hecho de velocidades medias observamos que han estado cerca de la velocidad máxima permitida, pero no podemos asegurar que se haya sobrepasado, ni tampoco que no. Para responder a esta pregunta deberemos saber más.

Tasa de variación

Se define la **tasa de variación** de una función *f* entre los valores *a* y *b* como:

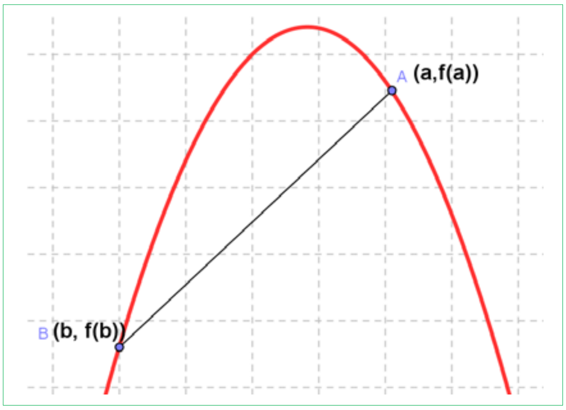
$$TV(a, b) = f(b) - f(a)$$

Tasa de variación media

Se define la **tasa de variación media** de una función *f* entre los valores *a* y *b* como:

$$\text{TVM}(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La tasa de variación media determina la **velocidad media**, si la función *f* es una función espacio – tiempo, y determina la pendiente o **coeficiente angular de la recta secante** que pasa por los puntos (*a*, *f*(*a*)) y (*b*, *f*(*b*)).



Actividades resueltas

- *La pendiente o coeficiente angular de la recta secante de* $y = x^2 + 3x$ en el intervalo [1, 3] es:

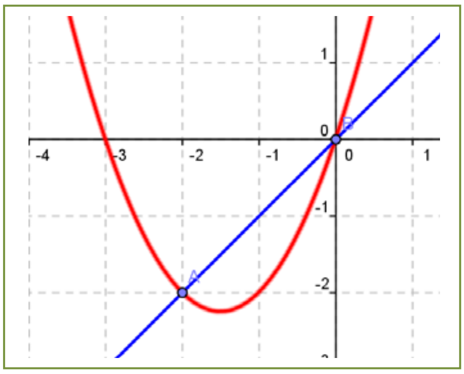
$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{(9 + 9) - (1 + 3)}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

En efecto, la recta que pasa por los puntos (1, 4) y (3, 18) tiene de ecuación: $y = 7x - 3$, y su coeficiente angular es 7.

- *La pendiente o coeficiente angular de la recta secante de* $y = x^2 + 3x$ en el intervalo [–2, 0] es:

$$\frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{(0) - ((-2)^2 + 3 \cdot (-2))}{2} = \frac{-(-2)}{2} = 1.$$

En efecto, la recta que pasa por los puntos (–2, –2) y (0, 0) tiene de ecuación: $y = x$, y su coeficiente angular es 1.



La tasa de variación media de una función *f* en el intervalo (*a*, *b*) coincide con la **pendiente** de la recta secante a la gráfica de la función que pasa por los puntos (*a*, *f*(*a*)) y (*b*, *f*(*b*)).

- *La velocidad media de un coche que tarda* 5 horas en recorrer 550 km es 550/5 = 110 km/h.

La tasa de variación media de una función espacio – tiempo en el intervalo (*a*, *b*) nos proporciona la velocidad media entre el tiempo *a* y el tiempo *b*. La tasa de variación media de una función velocidad – tiempo nos proporciona la aceleración media.

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

1. Halla la tasa de variación media en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3] de las funciones siguientes:

a) $y = 3x - 4$ b) $y = -2x - 3$ c) $y = 0'5x + 2$ d) $y = x - 1$

A la vista de lo que has obtenido, ¿crees que la tasa de variación media de las funciones polinómicas de primer grado es siempre constante e igual a la pendiente de la recta que la representa?

2. Halla la tasa de variación media de la función $y = x^2 - 1$ en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3]. ¿Es ahora constante?

3. Halla la tasa de variación media de la función $y = x^3 + 1$ en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3].

Habrás comprobado que en los dos últimos ejercicios la tasa de variación media no es constante.

4. Al hacer un estudio sobre el aterrizaje de aviones se graba una película desde el momento en que el avión toca tierra hasta que se para, y se miden los tiempos y las distancias recorridas:

Tiempo (t) en segundos	0	2	4	6	8	10	12	14
Distancia (d) en metros	0	100	175	230	270	300	325	340

a) Calcula la velocidad media del avión.

b) Calcula la velocidad media en los intervalos: [0, 6], [2, 10] y [6, 14].

c) ¿Es constante?

5. Se estudia la posición de un coche respecto de la salida de un túnel y se obtienen los datos siguientes:

Tiempo (segundos)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Distancia (metros)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

a) Calcula la velocidad media del coche en el intervalo [0, 40].

b) Calcula la velocidad media en los intervalos [15, 25] y [20, 30]. ¿Es contante?

c) Si la velocidad máxima permitida es de 120 km/h, ¿consideras que ha podido sobrepasarla en algún momento? ¿Y si la velocidad máxima fuese de 80 km/h?

6. El tren AVE sale de la estación y aumenta su velocidad hasta llegar a 250 km/h en 10 minutos, mantiene entonces esa velocidad constante durante hora y media, y comienza a disminuirla hasta pararse en otros 10 minutos.

a) Representa en una gráfica la función tiempo - velocidad.

b) Ya sabes que la aceleración nos indica la variación de velocidad. Indica la aceleración media en los primeros 10 minutos.

c) Indica la aceleración media entre el minuto 10 y el minuto 90.

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

d) Determina la aceleración en los últimos 10 minutos.

7. Al lanzar un objeto verticalmente hacia arriba la altura (en metros) y, que alcanza a los x segundos viene dada por la función: $y = 40x - 5x^2$.

a) Escribe una tabla de valores y dibuja la gráfica de la función. ¿Tiene sentido para valores de x menores que 0? ¿Y mayores a 8?

b) Calcula la velocidad media del objeto en los intervalos siguiente: [0, 2], [0, 8], [1, 4], [4, 8] y [1, 8].

c) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el objeto?

1.2. Tasa de variación instantánea

El estudio de la tasa de variación media resulta insuficiente para resolver determinados problemas.

Por ejemplo, si volvemos a la actividad del viaje, no sabemos a qué velocidad iba el coche a las 2 horas exactamente. Tampoco sabemos si en algún momento ha sobrepasado la velocidad permitida de 120 km/h.

Otro ejemplo: Si un avión (o un coche) sufre un accidente, y los expertos quieren determinar las causas, no les interesa la velocidad media del avión, sino la velocidad instantánea en el momento del accidente.

Otro ejemplo más: Los bomberos utilizan lonas para recoger a las personas que deben saltar de un incendio. Para fabricar la lona y que resista deben conocer la velocidad en el momento del impacto, no la velocidad media de caída.

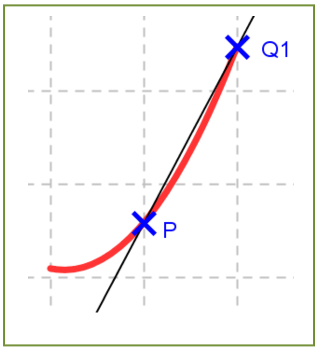
Actividades de introducción

- *La rama de parábola que representa el último tramo del viaje del ejercicio de introducción tiene por ecuación:*

$$y = 0'1x^2 + 118x - 143'3.$$

Han puesto una multa, y queremos saber si hemos sobrepasado la velocidad permitida. ¿Cómo crees que la policía de tráfico sabe si la hemos sobrepasado? ¿Sabe calcular la tasa de variación instantánea? No. No sabe. Hacen una fotografía y calculan la tasa de variación media en un intervalo muy pequeño.

Queremos saber cuál ha sido la velocidad del coche en el instante $t = 4$, en el que nos han puesto la multa. Utilizamos la calculadora del móvil y calculamos la velocidad media en el intervalo [4, 5], que es la pendiente de la recta secante PQ_1.



$$\frac{f(5)-f(4)}{5-4} = \frac{446'2 - 327'3}{1} = 118'9$$

Calculamos velocidades medias y pendientes en intervalos cada vez más

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

pequeños:

Velocidad media en el intervalo [4, 4’1]:

$$\frac{f(4'1)-f(4)}{4'1-4}=\frac{339'181-327'3}{0'1}=\frac{11'881}{0'1}=118'81$$

Velocidad media en el intervalo [4, 4’01]:

$$\frac{f(4'01)-f(4)}{4'01-4}=\frac{328'48801-327'3}{0'01}=\frac{1'18801}{0'01}=118'801$$

Velocidad media en el intervalo [4, 4’001]:

$$\frac{f(4'001)-f(4)}{4'001-4}=\frac{327'418001-327'3}{0'001}=\frac{0'1188001}{0'01}=118'8001$$

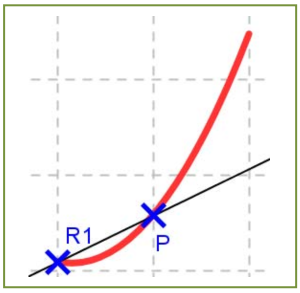
Velocidad media en el intervalo [4, 4’0001]:

$$\frac{f(4'0001)-f(4)}{4'0001-4}=\frac{327'311880001-327'3}{0'0001}=\frac{0'011880001}{0'001}=118'80001$$

Los valores: 118’9; 118’81; 118’801; 118’8001; 118’80001, ¿a qué valor crees que se aproximan? ¿*Parecen* acercarse a 118’8?

Tomamos ahora intervalos de extremo 4:

Velocidad media en el intervalo [3, 4] = pendiente de la recta R_1P.



$$\frac{f(4)-f(3)}{4-3}=\frac{327'3-208'6}{1}=118'7$$

Velocidad media en el intervalo [3’9, 4]:

$$\frac{f(4)-f(3'9)}{4-3'9}=\frac{327'3-315'421}{0'1}=\frac{11'79}{0'1}=118'79$$

Velocidad media en el intervalo [3’99, 4]:

$$\frac{f(4)-f(3'99)}{4-3'99}=\frac{327'3-326'11201}{0'01}=\frac{1'18799}{0'01}=118'799$$

Velocidad media en el intervalo [3’999, 4]:

$$\frac{f(4)-f(3'999)}{4-3'999}=\frac{327'3-327'1812001}{0'001}=\frac{0'1187999}{0'001}=118'7999$$

Velocidad media en el intervalo [3’9999, 4]:

$$\frac{f(4)-f(3'9999)}{4-3'9999}=\frac{327'3-327'28812}{0'0001}=\frac{0'011879999}{0'0001}=118'79999$$

Los valores 118’7; 118’79; 118’799; 118’7999; 118’79999, ¿a qué valor tienden? ¿*Parecen* acercarse, de nuevo, a 118’8?

Este es el procedimiento usado por la policía de tráfico. Hacen una fotografía y determinan la velocidad

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

media en un intervalo muy pequeño. Estamos seguros de que a las 4 horas no hemos sobrepasado los 120 km/h permitidos, pero hemos estado muy cerca, 118’8 km/h.

NOTA:

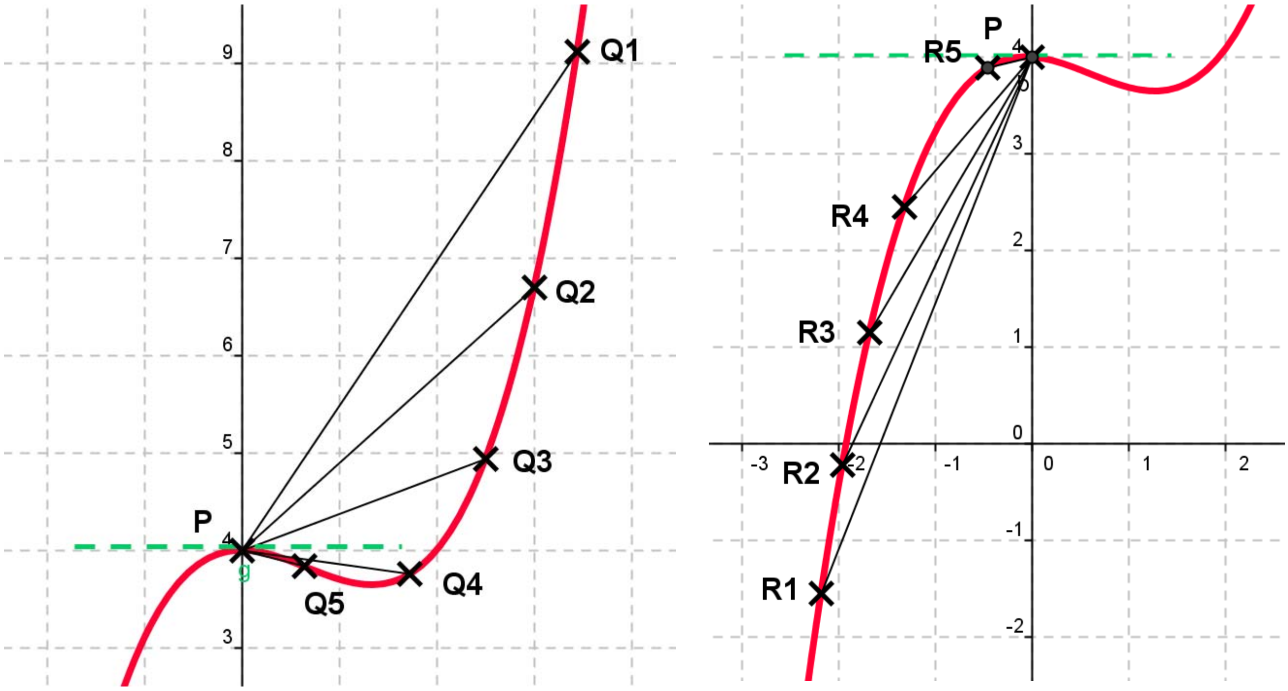
Este procedimiento de ir calculando velocidades medias en intervalos cada vez más pequeños es muy laborioso. Nunca más vamos a hacerlo así. Pero hemos querido hacerlo al menos una vez para que comprendas mejor el paso al límite.

Observa que las velocidades medias y las pendientes de las rectas secantes que pasan por *P parece que* se aproximan a un número, 118’8, tanto cuando 4 es el origen del intervalo como cuando es el extremo.

A ese número, el límite al que tienden las velocidades medias, es lo que vamos a definir como velocidad instantánea, y en general como derivada de una función en un punto.

En el ejemplo anterior ese límite *parece* que es 118’8 km/h que es la velocidad instantánea a las 4 horas de viaje.

Observa cómo las rectas secantes se aproximan a una recta, que es la **recta tangente** a la gráfica de la función en el punto *P*.



Actividades resueltas

- *Calcula la derivada de la función y* = 0’1x² + 118x – 146’3 *en x* = 4.

Hemos afirmado que, “*parecen acercarse”*, pero para asegurarnos vamos a calcular la tasa de variación media en cualquier intervalo [*x*, 4] y calcular el límite cuando *x* tiende a 4.

Por lo que la solución pasa por resolver este límite.

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$f'(4) = \lim_{x\to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(0'1x^2 + 118x - 146'3) - 327'3}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{0'1x^2 + 118x - 473'6}{x-4}$$

Recordando lo aprendido sobre límites, vemos que se trata de una indeterminación que se resuelve dividiendo los polinomios.

De manera que, igual que en otras ocasiones, dividiremos los polinomios para simplificar la expresión y calcular el límite. Mediante cualquier método de descomposición mediante raíces, se comprueba que:

$$0'1x^2 + 118x - 473'6 = (x - 4) \cdot (0'1x + 118'4)$$

Por ejemplo, para calcular el límite podemos dividir el polinomio del numerador entre $x - 4$ por la regla de *Ruffini*:

	0'1	118	–473'6
4		0'4	473'6
	0'1	118'4	0

El cociente es: $0'1x + 118'4$.

Por lo que la solución pasa por resolver este límite.

$$f'(4) = \lim_{x\to 4} \frac{0'1x^2 + 118x - 473'6}{x-4} = \lim_{x\to 4} (0'1x + 118'4) = 118'8$$

Resuelta la indeterminación, para calcular el límite, basta sustituir x por 4, y hemos obtenido 118'8.

Actividad resuelta

- *Para estar seguros de no haber sobrepasado la velocidad permitida vamos a calcular la velocidad instantánea a las* 5 *horas de haber comenzado el viaje*:

$$\lim_{x\to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{(0'1x^2 + 118x - 146'3) - 446'2}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{0'1x^2 + 118x - 592'5}{x-5} = \lim_{x\to 5} \left(0'1x + 118'5\right) = 120$$

Para simplificar el cociente hemos dividido los polinomios por la regla de *Ruffini*:

	0'1	118	–592'5
5		0'5	592'5
	0'1	118'5	0

El cociente es: $0'1x + 118'5$. Resuelta la indeterminación, para calcular el límite, basta sustituir x por 5, y hemos obtenido 120.

La velocidad instantánea a las 5 horas es de 120 km/h, pero no hemos sobrepasado los 120 km/h.

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Definición de derivada de una función en un punto

La derivada de una función en un punto responde al estudio de dos problemas aparentemente distintos: El primero es el estudio del **ritmo de variación** de la función en dicho punto. El segundo es de índole geométrica: la derivada de una función en un punto indica el valor de la pendiente de la recta **tangente** a la gráfica de la función en ese punto.

Por eso se calcula como el valor de la pendiente de una recta, dividiendo el incremento de la variable *y* entre el incremento de la variable *x*:

Incremento de la variable $y = f(x) - f(a)$

Incremento de la variable $x = x - a$

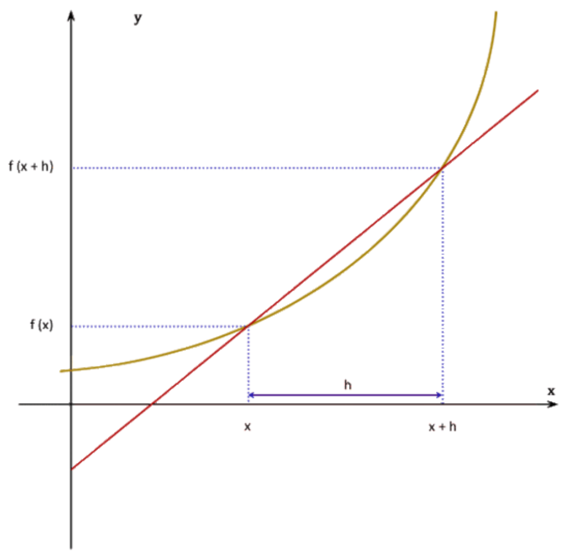
Pendiente de la recta secante que pasa por $(x, f(x))$ y por $(a, f(a))$ = $m = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Ese cociente de incrementos es el valor de la pendiente de la recta secante alrededor de *a*, no de la tangente en el punto *a*. Para que sea tangente en el punto *a*, el valor de *x* se tiene que aproximar al valor de *a* y, por ello, debemos calcular el límite. Entonces las rectas secantes se aproximan a la recta tangente.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Si hacemos un cambio de variable, tal que $x = a + h$ tendremos que, cuando *x* tiende a *a* entonces *h* tiende a 0 y por ello, podemos escribir la definición de derivada como:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



Definición:

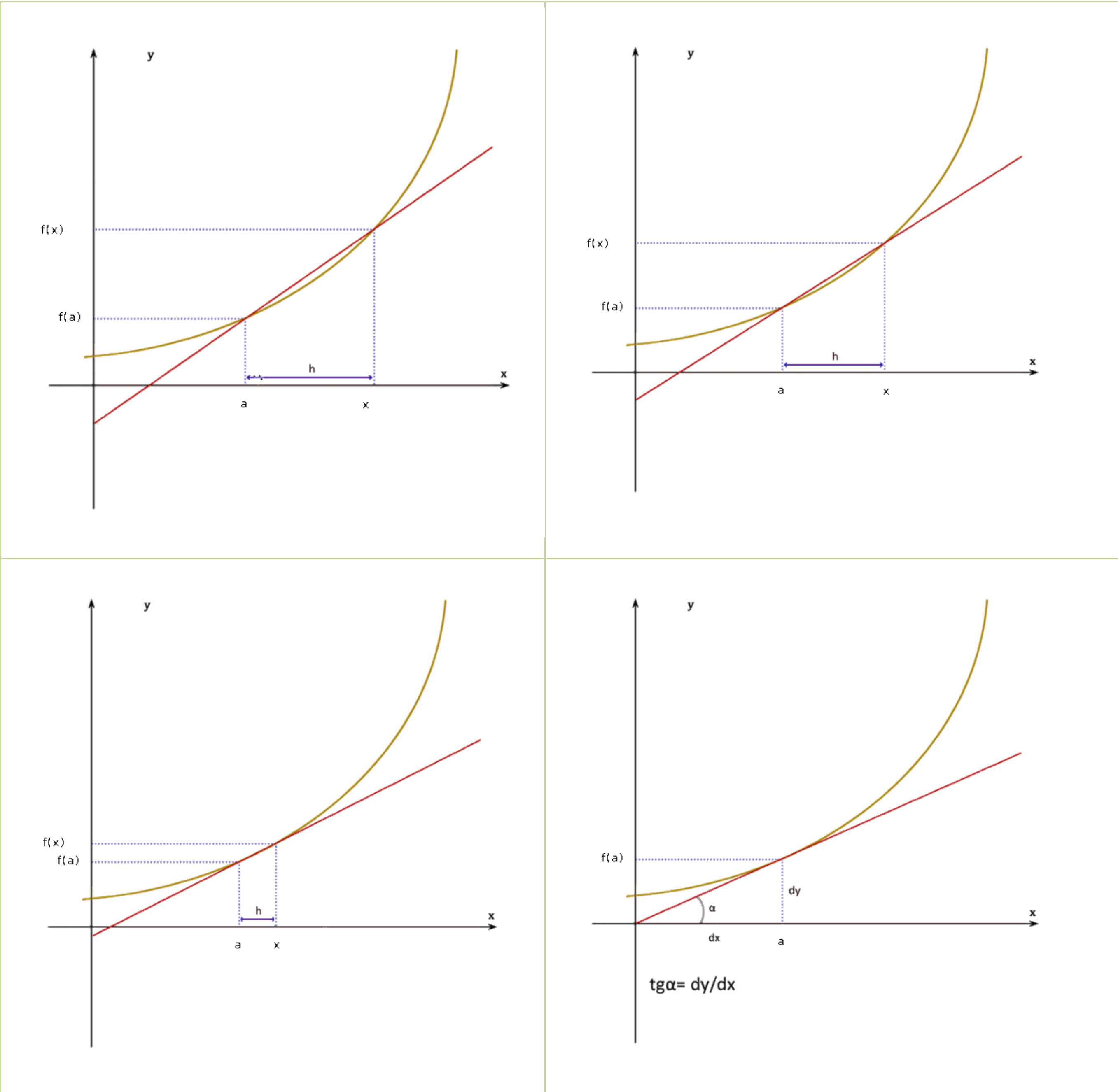
Si *X* es un intervalo abierto, $f: X \to \Re$ una función y $a \in X$, se dice que *f* es **derivable** en *a* si existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

y es un número real (es decir, no es infinito).

El valor del límite lo denominamos **derivada** de *f* en *x* = *a*, y lo representamos por *f'*(*a*), *Df*(*a*) o por $\frac{df}{dx}(a)$.

$$f'(a) = DF(a) = \frac{df}{dx}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *Calcula la derivada de la función $y = 0'1x^2 + 118x - 146'3$ en $x = a$.*

Queremos hacer lo mismo que en actividades resueltas anteriores, pero en un punto genérico $x = a$. Por tanto

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(0'1x^2+118x-146'3)-(0'1a^2+118a-146'3)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{0'1(x^2-a^2)+118(x-a)}{x-a}=$$
$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(0'1(x+a)+118)}{x-a}=\lim_{x\to a}(0'1(x+a)+118)=0'2a+118$$

Por tanto $\boldsymbol{f'(a) = 0'2a + 118}$.

Reto:

- *Calcula la derivada para cualquier punto $x = a$ de la función $y = x^2$.*

Solución 1:

Sustituyendo los valores de la función $y = x^2$ en la definición resulta que:

$$f(x) = x^2;\ f(a) = a^2;$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}$$

Por lo que la solución pasa por resolver este límite.

Recordando lo aprendido sobre límites, vemos que se trata de una indeterminación ya que para el valor a se anulan el numerador y el denominador.

De manera que, igual que en otras ocasiones, debemos dividir ambos polinomios. Mediante cualquier método de descomposición mediante raíces, se comprueba que:

$x^2 - a^2 = (x - a)\cdot(x + a)$ (suma por diferencia, diferencia de cuadrados)

Así que, después de sustituir, el límite sería:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\cdot(x+a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a)=2a$$

- *Calcula la derivada de la función $y = x^2$ mediante el límite de la otra expresión de la derivada.*

Solución 2:

Sustituyendo los valores de la función $y = x^2$ en la definición $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ resulta que:

$$\boldsymbol{f(x) = x^2;\ f(a) = a^2;\ f(a+h) = (a+h)^2.}$$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2}{h}$$

Dividiendo por h, se obtiene:

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2a + h) = 2a$$

Reto:

- *Calcula la derivada en un punto cualquiera x para la función $y = x^2$.*

Actividades propuestas

8. Halla la derivada de las funciones siguientes en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$:

a) $y = 3x - 4$ b) $y = -2x - 3$ c) $y = 0'5x + 2$ d) $y = x - 1$

A la vista de lo que has obtenido, ¿crees que la derivada de las funciones polinómicas de primer grado es siempre constante e igual a la pendiente de la recta que la representa?

9. Halla la derivada de la función $y = x^2 - 1$ en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$. ¿Es ahora constante?

10. Halla la derivada de la función $y = x^3 + 1$ en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$.

Habrás comprobado que en los dos últimos ejercicios la derivada no es constante.

11. Al lanzar un objeto verticalmente hacia arriba la altura (en metros) y, que alcanza a los x segundos es: $y = 40x - 5x^2$. Calcula la velocidad a los $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$ y $x = 6$ segundos. Determina también la altura de la piedra a esos segundos. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el objeto?

12. En el viaje de la actividad de introducción el coche recorría entre la primera hora y la segunda una distancia y dada por la ecuación: $y = 0'2x^2 + 110x - 67'2$. Determina la velocidad que llevaba el coche para $x = 1'5$.

13. En dicho viaje la distancia recorrida para $2'5 \leq x < 3$ viene dada por la ecuación $y = 110x - 121'4$. Y para $3 \leq x \leq 5$ por $y = 0'1x^2 + 118x - 146'3$. Para $x = 3$ hay un cambio en la velocidad. Calcula la velocidad antes de $x = 3$, y la velocidad después de $x = 3$.

14. Al caer un cuerpo en el vacío la distancia d (en metros), recorrida a los t segundos viene dada aproximadamente por la expresión: $d = 5t^2$. (La expresión es $d = 1/2gt^2$, donde g es la aceleración de la gravedad terrestre, aproximadamente de 9'8):

a) ¿A qué velocidad llegará al suelo una persona que en un incendio se lance a la lona de los bomberos y tarde 4 segundos en llegar a ella?

b) ¿A qué velocidad llagará si se lanza desde una altura de 10 metros?

15. Un vehículo espacial despega de un planeta con una trayectoria dada por: $y = 50x - 0'2x^2$ (x e y en km). La dirección del vehículo nos la proporciona la recta tangente en cada punto. Determina la dirección del vehículo cuando está a 2 km de distancia sobre el horizonte.

16. Desde un avión nodriza se suelta un avión experimental cuyo impulsor se enciende a la máxima potencia y permanece encendido 20 segundos. La distancia que separa al avión experimental del avión nodriza viene dada por $d = 0'3t^4$. Calcula la velocidad del avión experimental a los 3, 4, 7 y 10 segundos de haber sido soltado.

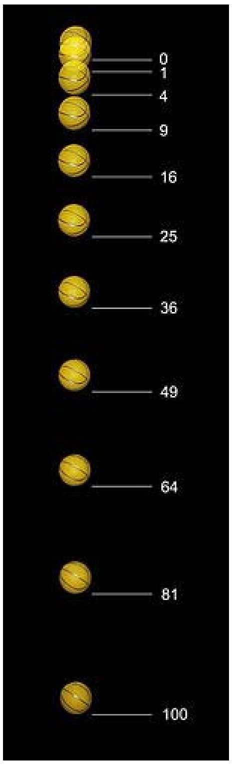
17. Representa gráficamente la función $y = 2$, y determina su derivada para $x = 1, 2, 3... a$. ¿Cuánto vale? ¿Es siempre la misma? ¿Ocurrirá lo mismo para cualquier recta horizontal $y = b$?

18. Dibuja una función cualquiera y dos puntos sobre ella, $f(x)$ y $f(a)$, correspondientes a las ordenadas x, a. Interpreta geométricamente la definición de derivada a partir del dibujo.

19. Dibuja una función cualquiera y un punto cualquiera sobre la función $f(a)$. Dibuja también un segmento sobre el eje de abscisas con origen en a y longitud h. Interpreta de nuevo la definición de derivada en un punto basándote en dicha figura.

20. Calcula la derivada mediante el límite de la función $y = x^2 - x + 1$ en el punto $x = 1$. Calcula la derivada mediante el límite de la función $y = x^2 - x + 1$ en el punto $x = a$. Calcula mediante la expresión resultante $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(12)$, $f'(5'43)$ y $f'(-7)$.

21. Caída libre de una pelota. En la figura se muestran, mediante fotografía estroboscópica[1], las posiciones de la pelota a intervalos regulares de tiempo: para $t = 1, 2, 3, 4, 5, ...$, el espacio recorrido es proporcional a 1, 4, 9, 16, 25, ..., etc. Calcula la función de posición $y = f(t)$, y calcula la velocidad y la aceleración derivando la función de posición.



Posiciones de la pelota a intervalos regulares de tiempo, para $t = 1, 2, 3, 4, 5$ ...

1.4. Derivadas por la derecha y derivadas por la izquierda

Ejemplo:

- *En el ejercicio de introducción del viaje* calculamos las velocidades medias cuando 4 era el origen y luego cuando 4 era el extremo del intervalo.

En un caso los valores de las velocidades medias obtenidas eran de:

118'7; 118'79; 118'799; 118'7999; 118'79999,

cuando el punto era menor que 4, y en el otro de:

118'9; 118'81; 118'801; 118'8001; 118'80001,

cuando el punto era mayor que 4.

En el primer caso se ha calculado el límite a la izquierda y en el segundo, el límite a la derecha.

Se define la derivada de una función en un punto por la derecha o por la izquierda según el lado por el que se aproxime la variable al punto donde se va a calcular el límite de la función.

Definición de derivada a la derecha

Definición:

1 Una lámpara estroboscópica es un instrumento que ilumina una escena durante intervalos regulares de tiempo. Si utilizamos este tipo de luz sobre un movimiento repetitivo, como la rotación de una rueda, y el intervalo coincide con un periodo completo de movimiento, el objeto parecerá estático al observador.

Si X es un intervalo, f: $X \rightarrow \Re$ una función y $a \in X$, se dice que f es **derivable por la derecha** en a si existe el límite por la derecha:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Al valor del límite lo llamamos **derivada por la derecha** de f en $x = a$, y lo representamos por $f'(a^+)$.

Es decir, la variable se aproxima al punto por la derecha, y por tanto es siempre $x > a$.

Definición de derivada por la izquierda:

Definición:

Si X es un intervalo, f: $X \rightarrow \Re$ una función y $a \in X$, se dice que f es **derivable por la izquierda** en a si existe el límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

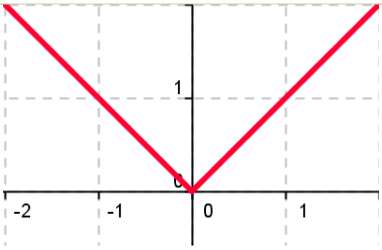
Al valor del límite lo llamamos **derivada por la izquierda** de f en $x = a$, y lo representamos por $f'(a^-)$.

Es decir, la variable se aproxima al punto por la izquierda, y por tanto es siempre $x < a$.

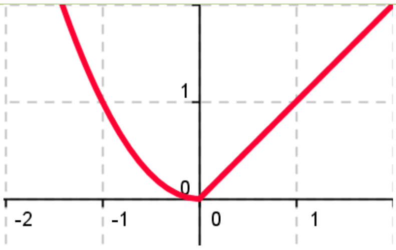
Para que exista la derivada de la función en un punto (a, $f(a)$), debe existir el límite $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ por lo que deben existir los dos límites laterales y por tanto deben existir la derivada por la derecha y la derivada a la izquierda en ese punto, y sus valores deben coincidir.

Actividades resueltas

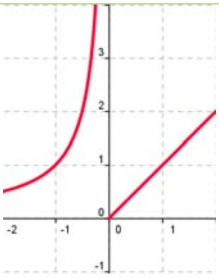
- *Las funciones cuyas gráficas aparecen a continuación son derivables en todos los puntos excepto en* (0, 0). *Observa el comportamiento de la gráfica en dicho punto. Comprueba cómo o no existe alguno de los límites laterales o éstos no coinciden.*



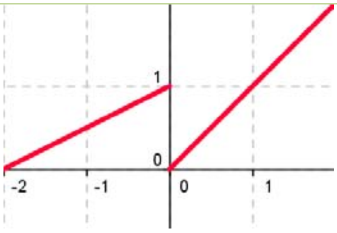
Los límites laterales existen, pero no coinciden, valen –1 y 1 respectivamente.



Los límites laterales existen, pero no coinciden, valen 0 y 1 respectivamente.



El límite lateral a la izquierda no existe.



Los límites laterales existen, pero no coinciden. La función no es continua en el origen.

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.5. Función derivada

Hasta ahora hemos calculado la derivada de una función en un punto, o lo que es lo mismo, la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.

Hemos calculado derivadas en puntos concretos como x = 1, x = 3... y en ocasiones en un punto genérico $x = a$. La ventaja de utilizar un punto de cálculo genérico $x = a$, es, que sustituyendo por el valor que nos interese (a = 1, a = 3...), podemos calcular rápidamente la derivada en dichos puntos, y no tendremos que repetir el cálculo para cada uno de ellos.

De esta forma estamos definiendo una nueva función, pues a cada punto le asignamos su derivada, que vamos a denominar función derivada, $y = f'(x)$, y al punto le vamos a llamar, en lugar de (a), x. A la función f' se le llama función derivada de f.

Definición:

Si f es derivable en X se llama **función derivada** de f a la función que asocia a cada número real de X el valor de la derivada de f en dicho punto. A esta nueva función la designamos por f', Df o $\dfrac{df}{dx}$.

Por ejemplo, en el caso: $f(x) = x^3$ entonces $f'(a) = 3\cdot a^2$

La segunda expresión es una función que asigna a cada punto (a) su cuadrado multiplicado por tres. Por lo tanto: si $f(x) = x^3$ entonces $f'(x) = 3\cdot x^2$.

Ejemplo:

- *Para calcular la derivada de $f(x) = k$, utilizamos la definición de derivada:*

$$f'(x) = \lim_{b \to x} \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = \lim_{b \to x} \frac{0 - 0}{b - x} = 0$$

Ejemplo:

- *Para calcular la derivada de $f(x) = x^3$* volvemos a utilizar la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{b \to x} \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = \lim_{b \to x} \frac{b^3 - x^3}{b - x} = \lim_{b \to x} \frac{(b - x)\cdot(b^2 + bx + x^2)}{b - x} = \lim_{b \to x} (b^2 + bx + x^2) = 3x^2$$

Derivación y continuidad

Si f es derivable en un punto entonces la función es continua en dicho punto.

Actividades propuestas

22. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla con las derivadas:

Función	$f(x) = x^3$	$f(x) = 2$	$f(x) = x^2$	$f(x) = x$	$f(x) = k$	$f(x) = 2x + 3$	$f(x) = 2x^2 + 3x$
Derivada	$f'(x) = 3x^2$	$f'(x) =$	$f'(x) =$	$f'(x) =$	$f'(x) =$	$f'(x) =$	$f'(x) =$

23. Piensa en un ejemplo de función no derivable y que sí sea continua.

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. REGLAS DE DERIVACIÓN

El procedimiento de calcular la función derivada calculando el límite se puede simplificar mucho utilizando las "*reglas de derivación*". Ya hemos calculado muchas derivadas, por lo que ya sabes que la derivada de $y = x^2 - x + 1$ es $y' = 2x - 1$; que la derivada de $y = 80x - 37$ es $y' = 80$; que la derivada de $y = 0'1x^2 + 118x - 146'3$ es $y' = 0'2x + 118$... Para que el proceso de calcular derivadas no sea tan laborioso como lo es aplicando la definición de derivada, vamos a estudiar las reglas que nos permitan derivar rápidamente y con eficacia.

2.1. Derivada de la función potencial $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$

Observa que ya hemos calculado la derivada de varias de estas funciones: si $f(x) = x^2$ entonces $f'(x) = 2x$; si $f(x) = x^3$ entonces $f'(x) = 3x^2$...

¿Cuál crees que es la derivada de x^8? ¿Y la de x^5? Son $8x^7$ y $5x^4$, ¿has acertado?

Para la derivada de $f(x) = x^n$, $n \in$ N esperamos obtener que:

Si $f(x) = x^n$ entonces $f'(x) = n\cdot x^{n-1}$, $n \in$ N

Para demostrarlo usamos la definición de derivada y la regla de *Ruffini* para calcular el límite:

$b^n - x^n = (b - x)\cdot(b^{n-1} + x\cdot b^{n-2} + x^2\cdot b^{n-3} + \ldots + x^{n-2}\cdot b + x^{n-1})$

$$f'(x) = \lim_{b\to x} \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = \lim_{b\to x} \frac{b^n - x^n}{b - x} = \lim_{b\to x} \frac{(b - x)\cdot(b^{n-1} + x\cdot b^{n-2} + x^2\cdot b^{n-3} + \ldots + x^{n-2}\cdot b + x^{n-1})}{b - x} =$$

$$\lim_{b\to x}\left(b^{n-1} + xb^{n-2} + \ldots + x^{n-1}\right) = nx^{n-1}.$$ c.q.d.

Observación:

El símbolo + con puntos suspensivos (+ ... +) equivale la suma de todos los términos intermedios, que como se puede ver en los exponentes, son un total de n. También se puede escribir en forma de sumatorio:

$$b^{n-1} + x\cdot b^{n-2} + x^2\cdot b^{n-3} + \ldots + x^{n-2}\cdot b + x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\left(b^{n-k}\cdot x^{k-1}\right)$$

Otra observación:

c.q.d. es la abreviatura de "*como queríamos demostrar*".

La derivada de la función $f(x) = x^k$, aunque k no sea un número natural, es $f'(x) = k\cdot x^{k-1}$.

La demostración que hemos hecho es sólo válida para valores naturales del exponente, pero sin embargo el resultado es más general y sirve para cualquier valor del exponente. Más adelante lo demostraremos, pero así ya puedes utilizarlo desde el principio del cálculo de derivadas.

Actividades resueltas

- *Halla la derivada de la función* $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Se tiene que $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ y por lo tanto:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

- *Observa cómo se han obtenido las derivadas siguientes:*

Función	$f(x) = x^4$	$f(x) = x^7$	$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$	$f(x) = 1/x = x^{-1}$	$f(x) = 1/x^2 = x^{-2}$
Derivada	$f'(x) = 4x^3$	$f'(x) = 7x^6$	$f'(x) = (1/2)x^{(1/2)-1} = (1/2)x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x) = (-1)x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$	$f'(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

2.2. Derivada de una suma

También ya nos hemos encontrado con sumas en los ejercicios que hemos hecho, y hemos obtenido que si $y = 0'2x^2 + 110x - 67'2$ su derivada es $y' = 0'4x + 110$; o que si $y = 110x - 121'4$ entonces $y' = 110$. ¿Cuál crees que es la derivada de $y = 7 + x^2$? Si opinas que es $y' = 2x$, ¡has acertado! Vamos a encontrar ahora la regla general:

La derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas de cada una. Es decir:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Demostración:

Por la definición de derivada y por la propiedad del límite de una suma:

$$(f+g)'(x) = \lim_{b\to x} \frac{(f+g)(b) - (f+g)(x)}{b-x} = \lim_{b\to x} \frac{f(b) + g(b) - (f(x) + g(x))}{b-x} =$$

$$\lim_{b\to x}\left(\frac{f(b)-f(x)}{b-x} + \frac{g(b)-g(x)}{b-x}\right) = \lim_{b\to x}\frac{f(b)-f(x)}{b-x} + \lim_{b\to x}\frac{g(b)-g(x)}{b-x} = f'(x) + g'(x), \text{ c.q.d.}$$

Actividades resueltas

- *Halla la derivada de la siguiente función* $f(x) = 3x^5 + x^3$.

Se deriva cada término y se suma el resultado, luego $f'(x) = 15x^4 + 3x^2$.

2.3. Derivada de una constante por una función

En ejercicios anteriores ya hemos obtenido que la derivada de $0'1x^2$ es $0'2x$, o que la derivada de $110x$ es 110. ¿Cuál crees que es la derivada de $-3x^2$? Si opinas que es $-6x$ tu conjetura es acertada. Ahora vamos a encontrar una regla general.

Cuando una función esté multiplicada por una constante, su derivada es igual a la constante por la derivada de la función:

Si $f(x) = c \cdot g(x)$ entonces $f'(x) = c \cdot g'(x)$.

Demostración:

Utilizamos la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{b\to x}\frac{f(b)-f(x)}{b-x} = \lim_{b\to x}\frac{c\cdot g(b) - c\cdot g(x)}{b-x} = c\cdot \lim_{b\to x}\frac{g(b)-g(x)}{b-x} = c\cdot g'(x), \text{ c.q.d.}$$

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Por verificarse estas dos propiedades, la derivada de una suma y la derivada del producto de una constante por una función, se dice que el operador derivada es un **operador lineal**.

Actividades resueltas

- *Halla la derivada de la siguiente función* $f(x) = 8x^4$.

Lo primero es "bajar" el exponente a multiplicar por la variable y hallar un nuevo exponente restando una unidad. Después se simplifica la expresión y se eliminan los paréntesis.

$$f(x) = 8x^4 = 8\cdot x^4 \text{ luego } f'(x) = 8\cdot 4x^{4-1} = 32x^3.$$

2.4. Derivada de un producto

La derivada del producto de dos funciones es igual al producto de la derivada de la primera función por la segunda función sin derivar más el producto de la primera función sin derivar por la derivada de la segunda función:

$$\mathbf{(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Demostración:

Escribimos la definición de derivada:

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = \lim_{b\to x} \frac{f(b)\cdot g(b) - f(x)\cdot g(x)}{b-x} =$$

Sumamos y restamos $f(x)\cdot g(b)$:

$$\lim_{b\to x} \frac{f(b)\cdot g(b) - f(x)\cdot g(b) + f(x)\cdot g(b) - f(x)\cdot g(x)}{b-x} =$$

Sacamos factor común $f(x)$ y $g(b)$:

$$\lim_{b\to x} \frac{\left(f(b)-f(x)\right)\cdot g(b) + f(x)\cdot\left(g(b)-g(x)\right)}{b-x} =$$

Aplicamos propiedades de los límites, el límite de una suma y el límite de un producto:

$$\lim_{b\to x} \frac{\left(f(b)-f(x)\right)}{b-x} \cdot \lim_{b\to x} g(b) + \lim_{b\to x} f(x) \cdot \lim_{b\to x} \frac{\left(g(b)-g(x)\right)}{b-x} =$$

Calculamos los límites:

$$f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x), \text{ c.q.d.}$$

Para hallar la derivada del producto de más de dos funciones puedes utilizar la propiedad asociativa.

Actividades resueltas

- *Halla la derivada de la siguiente función* $f(x) = (4x + 2)\cdot(3x^7 + 2)$.

Identificamos las funciones de la siguiente manera:

$$g(x) = 4x + 2 \text{ luego } g'(x) = 4$$

$$h(x) = 3x^7 + 2 \text{ luego } h'(x) = 21x^6$$

y utilizando la regla anteriormente expuesta, vemos que:

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$f'(x) = (g(x) \cdot h(x))' = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) = 4(3x^7 + 2) + (4x + 2) \cdot (21x^6) = 12x^7 + 8 + 84x^7 + 42x^6 = 96x^7 + 42x^6 + 8$

Comprueba que el resultado es el mismo si primero efectuamos el producto y luego derivamos.

2.5. Derivada de un cociente

La derivada del cociente de dos funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, divididos por el cuadrado del denominador.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Aunque no es riguroso, para simplificar la notación y favorecer la memoria, se puede escribir de la siguiente manera:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{[g]^2}$$

Teniendo siempre presente que la variable de las funciones (x) es común a todas.

Actividades resueltas

- *Halla la derivada de la siguiente función* $h(x) = \frac{3x+1}{2x}$

Identificamos las funciones de la siguiente manera:

$$f(x) = 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3$$

$$g(x) = 2x \Rightarrow g'(x) = 2$$

y utilizando la regla de la derivada del cociente, vemos que:

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$h'(x) = \frac{3 \cdot (2x) - (3x+1) \cdot 2}{[2x]^2}$$

$$h'(x) = \frac{6x - 6x - 2}{4x^2}$$

$$h'(x) = \frac{-2}{4x^2} = \frac{-1}{2x^2}$$

Recuerda que:

Derivada de una suma de funciones	$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
Derivada del producto de una constante por una función	$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$.
Derivada de un producto de funciones	$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Derivada de un cociente	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *Calcula las siguientes derivadas y comprueba el resultado:*

a) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$	b) $f(x)=\frac{x^3-x^2+4}{9} \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2-2x}{9}$
c) $f(x)=\sqrt{4x}+\sqrt[3]{x}+\frac{5}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{5}{x^2}$	d) $f(x)=\frac{(x+1)^3}{\sqrt{x^3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{3(x+1)^2(x-1)}{2x^2\sqrt{x}}$
e) $f(x)=(2x-1)(x^2-6x+3) \Rightarrow f'(x)=6x^2-26x+12$	f) $f(x)=\frac{(x+4)^2}{x+3} \Rightarrow f'(x)=\frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}$

Actividades propuestas

24. Escribe las funciones derivadas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = x^{24}$; b) $g(x) = 6x^{10}$; c) $h(x) = 6/7x^{13}$; d) $j(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$; e) $p(x) = 5x^3 - x$

25. Calcula las derivadas de las siguientes funciones polinómicas:

a) $y = 6 + x - 5x^2$; b) $y = 6x^2 - 7x + 3x^5$; c) $y = 2/3x^7 + 8/5x^5 - 9/4x^4$; d) $y = x^8 - x$

26. Un determinado gas ocupa un volumen de 2 m³ a una presión de 5 Newtons por m². Según la ley de Boyle a cada presión ejercida sobre el gas corresponde un volumen dado por V = 10/P. ¿Cuál es la tasa de variación instantánea del volumen cuando la presión es de 10 Newtons por m². ¿Y cuando es de 20 Newtons por m²? ¿Es la mitad?

27. Ya hemos obtenido la derivada de $\boldsymbol{y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}}$. Utilízala para obtener la derivada en x = 1, 4, 5... ¿Puedes obtener la derivada en x = 0? Razona la respuesta.

28. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^2 + 3) \cdot (6x^6 - 5)$; b) $y = (7x^3 - 1) \cdot (5x^4 + 4)$; c) $\boldsymbol{y=\sqrt{x}\cdot(x^3-5x)}$

29. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\frac{x-1}{x+3}$; b) $y = x^2 + (5/3)x^3 - 2x + 7$; c) $y=\frac{2x^3-5x^2}{6x^4-2x^3}$; d) $y=\frac{\sqrt{x^3}}{x+2}$

30. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt[5]{x^7}$; b) $y=\frac{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt{x}}{x^3+5}$; c) $y=\frac{(x^4-2)\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5}}$; d) $y=\frac{\sqrt[6]{x^{11}}}{x+2}$.

Notación diferencial

La tasa de variación media de una función $y = f(x)$ en el intervalo $(a, a + h)$ es:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Siendo el numerador el incremento de la función y el denominador el incremento de la variable.

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Gottfried Wilhelm Leibniz utilizó la notación: $\frac{dy}{dx}$ para denotar la derivada de la función *y* respecto de la variable *x*, donde d*y* y d*x* no son numerador y denominador, sino un todo inseparable. Se lee, derivada de *y* respecto de *x*.

Esta notación es útil, sobre todo, si hay distintas variables.

Ejemplo:

- Si S = 4πr^2 entonces $\frac{dS}{dr} = 8\pi r$.
- Si V = πr^2h entonces $\frac{dV}{dr}$ = 2π*r*·*h* y $\frac{dV}{dh}$ = πr^2.

2.6. Regla de la cadena

La regla de la cadena es una fórmula matemática para calcular la derivada de la función compuesta por dos o más funciones. Esto es, la regla de la cadena expresa la derivada de la función compuesta $(f \circ g)(x)$ en términos de las derivadas de *f* y *g*.

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

o escrito en notación de Leibniz

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

Demostración

La demostración rigurosa es complicada pero si no explicamos los pasos difíciles podemos comprender de dónde procede:

$$h'(x) = \lim_{b \to x} \frac{h(b) - h(x)}{b - x} = \lim_{b \to x} \frac{f(g(b)) - f(g(x))}{b - x}$$

Multiplicamos y dividimos por *g*(*b*) – *g*(*x*)

$$= \lim_{b \to x} \frac{f(g(b)) - f(g(x))}{g(b) - g(x)} \cdot \frac{g(b) - g(x)}{b - x} =$$

Aplicamos la propiedad de los límites: el límite de un producto es el producto de los límites:

$$= \lim_{b \to x} \frac{f(g(b)) - f(g(x))}{g(b) - g(x)} \cdot \lim_{b \to x} \frac{g(b) - g(x)}{b - x}$$

Con determinadas condiciones de continuidad, cuando *b* tiende a *x* entonces *g*(*b*) tiende a *g*(*x*), por lo que:

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Actividades resueltas

- *Utilizando que la derivada de y = e^x es igual a y' = e^x halla la derivada de la función* $\boldsymbol{h(x)=e^{2x}}$

Identificamos las funciones de la siguiente manera:

$$f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x$$

$$g(x)=2x \Rightarrow g'(x)=2$$

y utilizando la regla de la cadena obtenemos que:

$$\boldsymbol{h(x)=e^{2x} \Rightarrow h'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)=f'(2x)\cdot g'(x)=e^{2x}\cdot 2}.$$

- *Calcula la derivada de* $y = (x^3 + 3)^2$.

Para aplicar bien la regla de la cadena es muy importante que comprendas bien la composición de funciones. En la derivada propuesta tenemos la función *"elevar al cuadrado"*, cuya derivada conoces bien $2x$, y la función $x^3 + 3$ cuya derivada es $3x^2$.

Aplicamos la regla de la cadena, primero la derivada de la función cuadrado en el punto $x^3 + 3$, y luego multiplicamos por la derivada de esta función:

$$y' = 2(x^3 + 3) \cdot 3x^2 = 6x^5 + 18x^2.$$

En este caso particular podemos comprobar el resultado calculando el cuadrado y derivando (en otros casos no queda más remedio que derivar aplicando la regla de la cadena).

$$y = (x^3 + 3)^2 = x^6 + 6x^3 + 9 \text{ luego } y' = 6x^5 + 18x^2. \text{ ¡Comprobado!}$$

- *La derivada de la función seno es la función coseno (y = sen(x) ⇒ y'= cos(x)).*

Un poco más adelante lo vamos a demostrar, pero utiliza ahora esta información para calcular las derivadas de $y = sen(x^2)$ y la de $y = (sen(x))^2$.

En la función $y = sen(x^2)$ la función seno se aplica a la función cuadrado, luego su derivada es

$$y' = cos(x^2) \cdot 2x.$$

Mientras que en la función $y = (sen(x))^2$ nos encontramos primero con la función cuadrado que se aplica a la función seno, luego su derivada es:

$$y' = 2sen(x) \cdot \cos(x).$$

- *Si f y g son dos funciones derivables en todo punto, y se sabe que* $f(1) = 2$, $f(2) = 5$, $g(1) = 1$, $f(2) = 6$, $f'(1) = 3$, $f'(2) = 6$, $f'(6) = 4$, $g'(1) = 1$, $g'(2) = 3$, $g'(5) = 1$.

  Determina el valor de: a) $(f\circ g)'(2)$; b) $(g\circ f)'(1)$; c) $(g\circ f)'(2)$; d) $(f\circ f)'(1)$.

  a) $(f\circ g)'(2) = f'(g(2))\cdot g'(2) = f'(6)\cdot g'(2) = 4 \cdot 3 = 12.$
  b) $(g\circ f)'(1) = g'(f(1))\cdot f'(1) = g'(2)\cdot f'(1) = 3 \cdot 3 = 9.$
  c) $(g\circ f)'(2) = g'(f(2))\cdot f'(2) = g'(5)\cdot f'(2) = 1 \cdot 6 = 6.$
  d) $(f\circ f)'(1) = f'(f(1))\cdot f'(1) = f'(2)\cdot f'(1) = 6 \cdot 3 = 18.$

Actividades resueltas

- *Calcula las derivadas de las funciones siguientes y comprueba el resultado:*

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

a) $f(x)=\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{(2-x)\sqrt{(4-x^2)}}$	b) $f(x)=\frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1+4x^2}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$
c) $f(x)=(3+x)\sqrt{3-x} \Rightarrow f'(x)=\frac{3(1-x)}{2\sqrt{3-x}}$	d) $f(x)=\sqrt{x^2+9} \Rightarrow f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

Actividades propuestas

31. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^5 - 7x^3)^{12}$

b) $y = (3x^3 - 5x^2)^7$

c) $y=\sqrt{(4x^5-8x^3)^5}$

d) $y=\sqrt[3]{(2x^2+4x^7)^4}$

32. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt{\frac{3x^2-5x}{2x^3+7}(x^4-6x^3)^2}$

b) $y=\sqrt{\frac{(x^2+3)(x^2-7)}{x^3-5}}$

c) $y=\sqrt{\left(\frac{5x^2+3x}{8x^3-2x^2}\right)^3}$

d) $y=\sqrt[3]{3+\sqrt{x-\frac{2}{x^3}}}$

2.7. Derivada de la función logaritmo y derivación logarítmica

Vamos a estudiar la derivada de una función muy interesante, la función logaritmo, y vamos a utilizar una técnica muy útil, la derivación logarítmica, para calcular las derivadas de otras muchas funciones.

Si $f(x) = log_a(x)$ entonces $f'(x) = \frac{1}{x} log_a e$.

Demostración

Utilizamos la definición de derivada:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}=\lim_{h\to 0}\frac{log_a(x+h)-log_a(x)}{h}=$$

Por las propiedades de los logaritmos: a) $log_aA - log_aB = log_a(A/B)$; b) $k\cdot log_aA = log_aA^k$.

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} log_a \left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0} log_a \left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0} log_a \left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{x}\cdot\frac{1}{h}} = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0} log_a \left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}$$

Calculamos el límite, que es un límite tipo e.

Recuerda que e $= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ y que los límites en que la base tiende a 1, y el exponente a infinito se calculan utilizando esta definición del número e.

$$f'(x) = \frac{1}{x} log_a(e), \text{ c.q.d.}$$

Actividades resueltas

- *Halla la derivada de* $f(x) = \ln(x^5 - 7x^3)$

Tenemos que utilizar la derivada de la función logaritmo neperiano ($f(x) = ln(x) \Rightarrow f'(x) = 1/x$) y la regla de la cadena $f'(g(x)) \cdot g'(x)$, donde $g(x) = x^5 - 7x^3$ y su derivada: $g'(x) = 5x^4 - 21x^2$. Por tanto:

$$f'(x) = \frac{1}{x^5 - 7x^3}\cdot(5x^4 - 21x^2)$$

Actividades propuestas

33. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = log(x^5 - 7x^3)^{12}$

b) $y = log_2(3x^3 - 5x^2)^7$

c) $y = ln\sqrt{\frac{(4x^5 - 8x^3)^5}{3x-2}}$

d) $y = \ln\sqrt[3]{(2x^2 + 4x^7)^4}$

Técnica de la derivación logarítmica

Para calcular algunas derivadas es imprescindible utilizar esta técnica y, en otras ocasiones, facilita los cálculos. Consiste en aplicar logaritmos a los dos miembros de la función, y a continuación, derivar.

Actividades resueltas

- *Halla la derivada de* $f(x) = e^{(x^5 - 7x^3)}$

1) Aplicamos logaritmos neperianos: $ln(f(x)) = ln(e^{(x^5 - 7x^3)})$
2) Utilizamos propiedades de los logaritmos para simplificar el segundo miembro (en este ejemplo, el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base):

$$ln(f(x)) = ln(e^{(x^5 - 7x^3)}) = (x^5 - 7x^3) \cdot ln(e) = (x^5 - 7x^3)$$

3) Derivamos los dos miembros de la igualdad: $\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = 5x^4 - 21x^2$

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4) Despejamos $f'(x)$:

$$f'(x) = f(x) \cdot (5x^4 - 21x^2) = e^{(x^5-7x^3)} \cdot (5x^4 - 21x^2).$$

- *Halla la derivada de la* ***función exponencial*** $f(x) = a^x$.

Utilizamos la misma técnica. Intenta hacerlo tú solo y luego comprueba si te ha salido bien:

1) Aplicamos logaritmos: $ln(f(x)) = ln(a^x)$
2) Utilizamos propiedades de los logaritmos para simplificar el segundo miembro (en este ejemplo, el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base):

$$ln(f(x)) = ln(a^x) = x \cdot ln(a)$$

3) Derivamos los dos miembros de la igualdad: $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = ln(a)$
4) Despejamos $f'(x)$:

$$f'(x) = f(x) \cdot ln(a) = a^x \cdot ln(a).$$

Si $y = a^x$ entonces $y' = a^x \cdot ln(a)$.

Si $y = e^x$ entonces $y' = e^x$.

La función exponencial $y = e^x$ coincide con su derivada, $y' = e^x$.

- *Halla la derivada de la* ***función potencial*** $f(x) = x^k$, $k \in \Re$.

Antes adelantamos su derivada, pero ahora vamos a demostrarlo siendo el exponente cualquier número, no únicamente un número natural. Intenta hacerlo tú solo y luego comprueba si te ha salido bien:

1) Aplicamos logaritmos: $ln(f(x)) = ln(x^k)$
2) Utilizamos propiedades de los logaritmos para simplificar el segundo miembro (en este ejemplo, el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base):

$$ln(f(x)) = ln(x^k) = k \cdot \ln(x)$$

3) Derivamos los dos miembros de la igualdad: $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{k}{x}$
4) Despejamos $f'(x)$:

$$f'(x) = f(x) \cdot (k/x) = x^k \cdot (k/x) = kx^{k-1}.$$

Si $y = x^k$ entonces $y' = kx^{k-1}$, $k \in \Re$.

- *Halla la derivada de la* ***función exponencial – potencial:*** $f(x) = g(x)^{h(x)}$.

Utilizamos la misma técnica. Intenta hacerlo tú solo y luego comprueba si te ha salido bien:

1) Aplicamos logaritmos: $ln(f(x)) = ln(g(x)^{h(x)})$
2) Utilizamos las propiedades de los logaritmos para simplificar el segundo miembro (en este ejemplo, el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base):

$$ln(f(x)) = ln(g(x)^{h(x)}) = h(x) \cdot ln(g(x))$$

3) Derivamos los dos miembros de la igualdad: $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = h'(x) \cdot ln(g(x)) + h(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4) Despejamos $f'(x)$:

$$f'(x) = f(x)\cdot(h'(x)\cdot ln(g(x)) + h(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\cdot g'(x))$$

- *Halla la derivada de la* ***función exponencial – potencial:*** $f(x) = x^x$.

Utilizamos la misma técnica. Intenta hacerlo tú solo y luego comprueba si te ha salido bien:

1) Aplicamos logaritmos: $ln(f(x)) = ln(x^x)$
2) Utilizamos propiedades de los logaritmos para simplificar el segundo miembro (en este ejemplo, el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base):

$$ln(f(x)) = ln(x^x) = x\cdot ln(x)$$

3) Derivamos los dos miembros de la igualdad: $\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = 1\cdot ln(x) + x\cdot\frac{1}{x} = ln(x)+1$
4) Despejamos $f'(x)$: $f'(x) = x^x(ln(x) + 1)$

Recuerda que:

Si $f(x) = ln(x)$ entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$	Si $y = ln(f(x))$ entonces $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$y = ln(1+e^{2x}) \Rightarrow y' = \frac{e^{2x}\cdot 2}{1+e^{2x}}$
Si $f(x) = a^x$ entonces $f'(x) = a^x\cdot lna$	$y = a^{f(x)} \Rightarrow y' = a^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot lna$	$y = e^{2x^3+5} \Rightarrow y' = e^{2x^3+5}\cdot(6x^2)$
$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$y = \sqrt{x^7+5x} \Rightarrow y' = \frac{7x^6+5}{2\sqrt{x^7+5x}}$
$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2}$	$y = \frac{1}{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}$	$y = \frac{1}{e^{x+1}} \Rightarrow y' = \frac{-e^{x+1}}{(e^{x+1})^2}$

Actividades propuestas

34. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = x^{x^5-7x^3}$

b) $y = ((x+1)^{3x^3-5x^2})$

c) $y = e^{(4x^5-8x^3)^5}$

d) $y = \sqrt[3]{(x-1)^{(2x^2+4x^7)^4}}$

35. Utilizando que la derivada de $y = e^x$ es $y' = e^x$, calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x^5-7x^3}$ b) $y = (e^{3x^3-5x^2})^7$

c) $y = e^{(4x^5-8x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{e^{(2x^2+4x^7)^4}}$

2.8. Derivadas de funciones trigonométricas e hiperbólicas

Vamos a estudiar las derivadas de muchas más funciones.

Derivada de la función seno

Si $f(x) = sen(x)$ entonces $f'(x) = cos(x)$.

Demostración

Utilizamos la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{B\to x} \frac{f(B)-f(x)}{B-x} = \lim_{B\to x} \frac{sen(B)-sen(x)}{B-x} =$$

La fórmula de la diferencia de senos:

$$\lim_{B\to x} \frac{2\cos\frac{b+x}{2}\, sen\frac{B-x}{2}}{B-x} = \lim_{B\to x} \frac{\cos\frac{b+x}{2}\, sen\frac{B-x}{2}}{\frac{B-x}{2}} =$$

Por la propiedad del límite de un producto

$$\lim_{B\to x} \frac{\cos\frac{B+x}{2}\, sen\frac{B-x}{2}}{\frac{B-x}{2}} = \lim_{B\to x} \cos\frac{B+x}{2} \cdot \lim_{B\to x} \frac{sen\frac{B-x}{2}}{\frac{B-x}{2}}$$

Calculamos los límites:

$$\lim_{B\to x} \cos\frac{B+x}{2} = \cos\frac{2x}{2} = \cos x;\ \lim_{B\to x} \frac{sen\frac{B-x}{2}}{\frac{B-x}{2}} = 1$$

Por tanto $f'(x) = cos(x)$, c.q.d.

$sen(a+b) = sena\cdot cosb + cosa\cdot senb$

$\underline{sen(a–b) = sena\cdot cosb – cosa\cdot senb}$

$sen(a+b) – sen(a–b) = 2\, cosa\cdot senb$

Si $a+b=B$ y $a–b=x$ entonces $a = \frac{B+x}{2}$, $b = \frac{B-x}{2}$

Sustituyendo:

$$senB - senx = 2\cos\frac{B+x}{2}\, sen\frac{B-x}{2}$$

Derivada de la función coseno

Si $f(x) = cos(x)$ entonces $f'(x) = – sen(x)$.

Demostración

Sabemos que $cos(x) = sen(\frac{\pi}{2} – x)$ por lo que si $f(x) = cos(x)$ entonces $f'(x) = – cos(\frac{\pi}{2} – x) = – sen(x)$, c.q.d.

Derivada de la función tangente

Si $f(x) = tg(x)$ entonces $f'(x) = 1 + tg^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Demostración

Sabemos que $f(x) = tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$, por lo que utilizamos la derivada de un cociente:

$$f'(x) = \frac{sen'(x)\cdot\cos(x) - sen(x)\cdot\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - sen(x)\cdot(-sen(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + sen^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

O bien, dividiendo numerador y denominador por $\cos^2(x)$, se tiene:

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$f'(x) = \frac{\cos^2(x)+sen^2(x)}{\cos^2(x)} = 1+\frac{sen^2(x)}{\cos^2(x)} = 1+tg^2(x)\text{, c.q.d.}$$

Derivada de las funciones hiperbólicas

La funciones seno hiperbólico, coseno hiperbólico y tangente hiperbólica se definen como:

$$sh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ ch(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ th(x)=\frac{sh(x)}{ch(x)}.$$

Si $f(x) = sh(x)$ entonces $f'(x) = ch(x)$.

Si $f(x) = ch(x)$ entonces $f'(x) = sh(x)$.

Si $f(x) = th(x)$ entonces $f'(x) = 1 - th^2(x)$.

Demostración

Derivando se obtiene que:

$$sh'(x)=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x-e^{-x}(-1)}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=ch(x)$$

$$ch'(x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x+e^{-x}(-1)}{2}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=sh(x)$$

Y la derivada de la tangente se obtiene utilizando la derivada del cociente.

Observa que las derivadas de las funciones hiperbólicas se parecen a las derivadas de las funciones trigonométricas con un cambio en los signos. ¿Qué te parecen? ¿Más fáciles de recordar, o más difíciles?

Recuerda que:

$f(x) = sen(x) \Rightarrow f'(x) = cos(x)$	$y = sen(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x)\cdot cos(f(x))$	$y = sen(e^x) \Rightarrow y' = e^x\cdot cos(e^x)$
$f(x) = cos(x) \Rightarrow f'(x) = -sen(x)$	$y = cos(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x)\cdot(-sen(f(x)))$	$y = cos(x^2) \Rightarrow y' = -2xsen(x^2)$
$f(x) = tg(x) \Rightarrow f'(x) = 1 + tg^2(x)$	$y = tg(f(x)) \Rightarrow y' = (1+tg^2(f(x)))\cdot f'(x)$	$y = tg(x^3) \Rightarrow y' = (1+tg^2(x^3))\cdot(3x^2)$
$f(x) = sh(x) \Rightarrow f'(x) = ch(x)$	$y = sh(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x)\cdot ch(f(x))$	$y = sh(\sqrt{x}) \Rightarrow y' = \frac{ch\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = ch(x) \Rightarrow f'(x) = sh(x)$	$y = ch(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x)\cdot sh(f(x))$	$y = ch(ln(x)) \Rightarrow y' = \frac{sh(ln(x))}{x}$
$f(x) = th(x) \Rightarrow f'(x) = 1-th^2(x)$	$y = th(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x)\cdot(1-th^2(f(x)))$	$y = th(x^4) \Rightarrow y' = (4x^3)\cdot(1-th^2(x^4))$

Actividades resueltas

- *Calcula las siguientes derivadas y comprueba los resultados:*

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

a) $f(x)=\frac{sen(x)}{1+\cos(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+\cos(x)}$	b) $f(x)=\cos(sen^2 7x) \Rightarrow$ $f'(x)=-14\cdot sen7x\cdot\cos 7x\cdot sen(sen^2 7x)$
c) $f(x)=\cos(sen7x) \Rightarrow f'(x)=-7\cos 7x\cdot sen(sen7x)$	d) $f(x)=tg(3x-5) \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{\cos^2(3x-5)}$
e) $f(x)=6\sqrt{\cos 2x} \Rightarrow f'(x)=-\frac{6sen2x}{\sqrt{\cos 2x}}$	f) $f(x)=ln\sqrt{\frac{1+sen(x)}{1-sen(x)}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\cos(x)}$
g) $f(x)=sh(\cos(x)) \Rightarrow f'(x)=-sen(x)\cdot ch(\cos(x))$	h) $f(x)=ln(sen^2(x)) \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{tg(x)}$
i) $f(x)=ln(ch(x)) \Rightarrow f'(x)=th(x)$	j) $f(x)=ln(\cos(x)) \Rightarrow f'(x)=-tg(x)$

Actividades propuestas

36. Recuerda la definición de cosecante: $cosec(x)=\frac{1}{sen(x)}$. Demuestra que: $(cosec(x))' = -\frac{\cos(x)}{sen^2(x)}$

37. Recuerda la definición de secante: $sec(x)=\frac{1}{cos(x)}$. Demuestra que: $(sec(x))'=\frac{sen(x)}{cos^2(x)}$

38. Recuerda la definición de cotangente: $cotg(x)=\frac{1}{tg(x)}$. Demuestra que: $(cotg(x))' = -\frac{1}{sen^2(x)}$

39. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = sen(x^5 - 7x^3)$

b) $y = (sen(3x^3 - 5x^2))^7$

c) $y = sen^5(x)\cdot cos^3(x)$

d) $y=\sqrt[3]{sen\left(2x^2+4x^7\right)^4}$

40. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = cos(e^{x^5} + 4x^3)$

b) $y = (cotg(5x^3 - 3x^2))^4$

c) $y = sen(cos(tg(7x^5 - 3x^3)^2))$

d) $y=\sqrt[3]{ch(sh(2x+1))^4}$

41. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=tg\frac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}}$

b) $f(x)=(2-3x)sh(2-3x)$

c) $f(x)=tg\frac{\sqrt{4-9senx}}{3+2\cos x}$

d) $f(x)=\frac{senx-x\cos x}{\cos x+xsenx}$

2.9. Derivada de la función inversa

Recuerda que:

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

La función inversa de la función $y = f(x)$ se define como:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

Por este motivo, recuerda que la gráfica de una función y su inversa son simétricas respecto de la diagonal del primer cuadrante.

Si conocemos la derivada de una función podemos calcular la derivada de su función inversa, pues:

Si f es una función derivable y biyectiva en X con $0 \notin f'(X)$ entonces f^{-1} es derivable en $f(X)$ y:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$$

Demostración:

Para comprobar que f^{-1} es derivable y calcular su derivada debemos calcular el límite:

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$$

Pero $x = f^{-1}(y)$ y sea $a = f^{-1}(b)$. Además, por definición de función inversa: $y = f(x)$ y $b = f(a)$. Por ser continua, cuando $y \to b$, entonces $x \to a$, por lo que el límite anterior es equivalente a:

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)}$$

Por tanto

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{x \to a} \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Por tanto existe el límite y su valor es:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}, \text{ c.q.d.}$$

Derivada de las funciones inversas de las funciones trigonométricas

Arco seno

La función arco seno es la función inversa de la función seno y se define por tanto como:

$$y = arcsen(x) \Leftrightarrow x = sen(y)$$

Si la definimos en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ es biyectiva. ¡Compruébalo!

Entonces su derivada es:

$$y = arcsen(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Demostración:

Aplicamos la derivada de la función inversa:

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}(x) = \frac{1}{\cos(arcsen(x))}$$

Sabemos que $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$, por tanto: $\cos(x) = \sqrt{1 - sen^2(x)}$

$$\frac{1}{\cos(arcsen(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2(arcsen(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ c.q.d.}$$

Arco coseno

La función arco coseno es la función inversa de la función coseno y se define por tanto como:

$$y = arccos(x) \Leftrightarrow x = cos(y)$$

Si la definimos en el intervalo (0, π) es biyectiva. ¡Compruébalo!

Entonces su derivada es:

$$y = arccos(x) \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Demostración:

Aplicamos la derivada de la función inversa:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}(x) = \frac{1}{-sen(\arccos(x))}$$

Sabemos que $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$, por tanto: $sen(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$

$$-\frac{1}{sen(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ c.q.d.}$$

Arco tangente

La función arco tangente es la función inversa de la función tangente y se define por tanto como:

$$y = arctg(x) \Leftrightarrow x = tg(y)$$

Si la definimos en el intervalo (–π/2, π/2) es biyectiva. ¡Compruébalo!

Entonces su derivada es:

$$y = arctg(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$$

Demostración:

Aplicamos la derivada de la función inversa:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}(x) = \frac{1}{1 + tg^2(arctg(x))} = \frac{1}{1+x^2}, \text{ c.q.d.}$$

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Recuerda que:

$f(x) = arcsen(x) \Rightarrow f'(x)= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = arcsen(f(x)) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$	$y = arcsen(e^x) \Rightarrow y' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$
$f(x) = arccos(x) \Rightarrow f'(x)= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y=arccos(f(x)) \Rightarrow y' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$	$y = arccos(x^2) \Rightarrow y' = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$
$f(x) = arctg(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$y = arctg(f(x)) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$	$y = arctg(x^3) \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{1+x^6}$

Actividades resueltas

- *Calcula las siguientes derivadas y comprueba los resultados:*

a) $f(x) = e^{ln(arctg\sqrt{x})} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$	b) $f(x) = arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$
c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} arcsen\frac{3\cos x + 2}{3+2\cos x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{3+2\cos x}$	d) $f(x) = arctg\frac{3senx}{4+5\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{5+4\cos x}$

Actividades propuestas

42. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = arcsen\sqrt{x+1}$

b) $y = ln(arccos\, x)$

c) $y = arctg(e^{2x+3})$

d) $y = arccos(\,sen(cos\, x))$

43. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = arcsen\sqrt{\frac{1+senx}{1-senx}}$

b) $y = e^{arccos\sqrt{x+3}}$

c) $y = sen(arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})$

d) $y = arccos\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

Argumento seno hiperbólico

La función argumento seno hiperbólico es la función inversa de la función seno hiperbólico y se define por tanto como:

$$y = argsh(x) \Leftrightarrow x = sh(y)$$

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Entonces su derivada es:

$$y = argsh(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Utilizaremos esta derivada cuando estudiemos las integrales, pues nos permitirá obtener algunas.

Demostración:

Aplicamos la derivada de la función inversa:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}(x) = \frac{1}{ch(arg\ sh(x))}$$

Sabemos que $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$, por tanto: $ch(x) = \sqrt{1+sh^2(x)}$

$$\frac{1}{ch(\arg sh(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+sh^2(\arg sh(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\text{, c.q.d.}$$

Argumento coseno hiperbólico

La función argumento coseno hiperbólico es la función inversa de la función coseno hiperbólico y se define por tanto como:

$$y = argch(x) \Leftrightarrow x = ch(y)$$

Entonces su derivada es:

$$y = argch(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Demostración:

Aplicamos la derivada de la función inversa:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}(x) = \frac{1}{sh(\arg ch(x))}$$

Sabemos que $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$, por tanto: $sh(x) = \sqrt{ch^2(x)-1}$

$$\frac{1}{sh(\arg ch(x))} = \frac{1}{\sqrt{ch^2(\arg ch(x))-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\text{, c.q.d.}$$

Argumento tangente hiperbólica

La función argumento tangente hiperbólica es la función inversa de la función tangente hiperbólica y se define por tanto como:

$$y = argth(x) \Leftrightarrow x = th(y)$$

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Entonces su derivada es:

$$y = argth(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{1-x^2}$$

Demostración:

Aplicamos la derivada de la función inversa:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\circ f^{-1}}(x) = \frac{1}{1-th^2(\arg th(x))} = \frac{1}{1-x^2}\text{, c.q.d.}$$

Recuerda que:

$f(x) = argsh(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$y = argsh(f(x)) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f(x)^2}}$	$y = argsh(e^x) \Rightarrow y' = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$
$f(x) = argch(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$y = argch(f(x)) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)^2-1}}$	$y = argch(x^2) \Rightarrow y' = \frac{2x}{\sqrt{x^4-1}}$
$f(x) = argth(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$	$y = argth(f(x)) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{1-f(x)^2}$	$y = argth(x^3) \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{1-x^6}$

Actividades resueltas

- *Ya sabemos que la derivada de $y = e^x$ es igual a $y' = e^x$, y que la derivada de $y = ln(x)$ es igual a $y' = 1/x$. También sabemos que las funciones exponencial y logaritmo son inversas la una de la otra. Utiliza la derivada de la función exponencial y de la función inversa para demostrar (de nuevo) la derivada de la función logaritmo neperiano.*

Actividades propuestas

44. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \arg sh\sqrt{2x+3}$ b) $y = ln(\arg th(5x))$

c) $y = \arg ch(e^{4x-1})$ d) $y = \arg sh(\arg th(x))$

45. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \arg sh\sqrt{\frac{1+shx}{1-shx}}$ b) $y = \sqrt{e^{\arg ch\sqrt{x+3}}}$

c) $y = sh(\arg th\frac{3x+7}{\sqrt{9-4x^2}})$ d) $y = \arg ch\frac{senx}{\sqrt{9-sen^2x^2}})$

3. APLICACIONES DE LA DERIVADA

3.1. Interpretación geométrica de la derivada: Recta tangente

Ya hemos visto que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es igual a $f'(a)$. Por tanto la ecuación de la recta tangente es:

$$y = f(a) + f'(a)\cdot(x - a).$$

Ejemplo:

- *Para encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función* $y = x^3 + 3x$ *en* $x = 1$ buscamos la recta de pendiente $f'(1)$ que pase por el punto $(1, f(1))$:

  $f(1) = 1^3 + 3\cdot 1 = 4;$

  $f'(x) = 3x^2 + 3;\ f'(1) = 3\cdot 1^2 + 3 = 6;$

Ecuación de una recta de pendiente 6 que pasa por el punto (1, 4):

$$y = 4 + 6(x - 1).$$

Actividades propuestas

46. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 7x^2 + 5x - 3$ en el punto $x = 2$

47. El perfil de una cierta montaña tiene la forma de una parábola: $y = 0'05x - 0'01x^2$, donde x e y se miden en km. Escribe la ecuación de la recta tangente para $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ km.

3.2. Interpretación física de la derivada

La **velocidad** es la derivada en el caso en que la función indique, dado el tiempo, el espacio recorrido.

La **aceleración** es la derivada de la velocidad respecto del tiempo.

$$v = \frac{de}{dt};\ a = \frac{dv}{dt}$$

Ejemplo:

- *El espacio recorrido por un vehículo viene dado por* $e = 1'2t + 0'08t^2$*, donde e se mide en metros y t en segundos. Determina la velocidad para* $t = 1$ *segundos. Determina la función velocidad y la función aceleración.*

Calculamos la derivada: $e' = 1'2 + 0'16t$. Para $t = 1$, $e'(1) = 1'36$ m/s $= v(1)$.

La función velocidad es la derivada $v = e' = 1'2 + 0'16t$.

Derivamos para obtener la aceleración: $a = v' = 0'16$ m/s².

Actividades propuestas

48. Un coche recorre una distancia e, en kilómetros, a las t horas, siendo $e = 20t + 0'5t^2$. Determina su

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

función velocidad y su función aceleración. ¿Es constante la aceleración? Si sigue a esa velocidad, ¿en qué instante sobrepasa la velocidad máxima permitida de 120 km/h?

3.3. Crecimiento y decrecimiento

Actividades resueltas

- *Imagina que desde un punto* 0 *soltamos un avión de juguete que describe una trayectoria f(x) =* 2*x –* 0’1*x*². *¿Cómo podemos saber si a los* 5 *metros del punto de lanzamiento el avión está subiendo o bajando? ¿Lo mismo a los* 15 *metros?*

En este caso es fácil que lo sepas, pues la trayectoria es una parábola que corta al eje de abscisas en los puntos (0, 0) y (0, 20), que como es una curva simétrica a los 5 metros el avión está subiendo. Alcanza el punto más alto a los 10 metros, y a los 15 metros desciende.

Para cualquier otra curva, que no conozcas tan bien, este problema nos lo resuelve la derivada:

Como $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ entonces para valores de *h* próximos a cero, tenemos:

$$f'(a) \cong \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$f(x) = 2x - 0'1x^2 \rightarrow f'(x) = 2 - 0'2x$

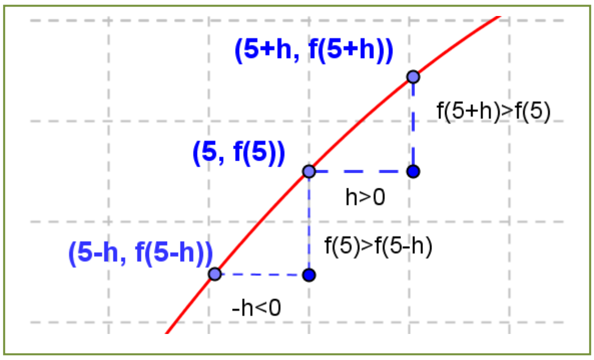
Para $a = 5$ tenemos $f'(5) = 2 - 0'2(5) = 1 > 0$. Por tanto $\frac{f(5+h) - f(5)}{h} \cong 1$ cuando *h* es próximo a cero.

Como el cociente es positivo, numerador y denominador deben tener el mismo signo.

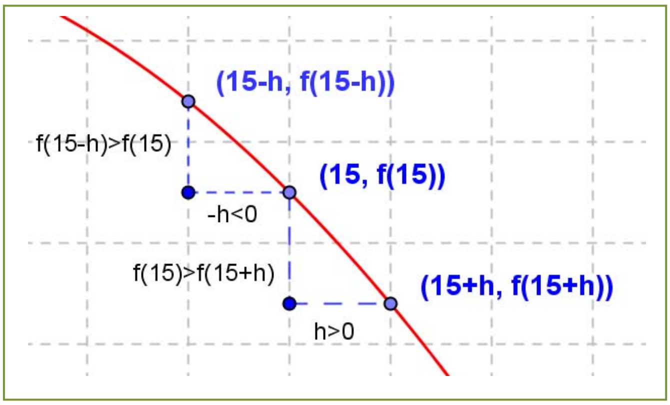
Por lo que, si $h > 0$ tendrá también que ser:

$f(5 + h) - f(5) > 0$, luego $f(5 + h) > f(5)$.

Si $h < 0$ también $f(5 + h) - f(5) < 0$, luego $f(5 + h) < f(5)$. La situación es la de la figura y podemos asegurar que, en un intervalo suficientemente pequeño de centro 5, la función es creciente.



Observa que hemos podido afirmarlo por ser la derivada en 5 un número positivo.



Repetimos el razonamiento para $a = 15$.

Para $a = 15$ tenemos $f'(15) = 2 - 0'2(15) = -1 < 0$. Por tanto $f(15+h) - f(15)/h \cong -1$ cuando *h* es próximo a cero.

Como el cociente es negativo, numerador y denominador deben tener distinto signo.

Por lo que, si $h > 0$ tendrá que ser:

$$f(15 + h) – f(15) < 0, \text{ luego } f(15 + h) < f(5).$$

Si $h < 0$ también $f(15 + h) – f(15) > 0$, luego $f(15 + h) > f(15)$. La situación es la de la figura y podemos asegurar que, en un intervalo suficientemente pequeño de centro 15, la función es decreciente.

Observa que hemos podido afirmarlo por ser la derivada en 15 un número negativo.

En general, podemos afirmar que:

Si $f'(a) > 0$ entonces la función $y = f(x)$ es **creciente** en $x = a$.

Si $f'(a) < 0$ entonces la función $y = f(x)$ es **decreciente** en $x = a$.

Ejemplo:

- *Determina si* $y = 0'1x^2 + 118x – 146'3$ es creciente o decreciente en $x = 4$.

Calculamos la derivada: $y'= 0'2x + 118$; en $x = 4$: $y'(4) = 0'2(4) + 118 = 118'8 > 0$. La función es creciente.

Actividades propuestas

49. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 + 3x$. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 – 3x$. ¿Cómo es en $x = 0$? ¿Y en $x = 2$? ¿Y en $x = –2$?

3.4. Máximos y mínimos

Recuerda que:

Una función alcanza en $(a, f(a))$ un **máximo global o absoluto** si $f(a)$ es el mayor valor que alcanza la función.

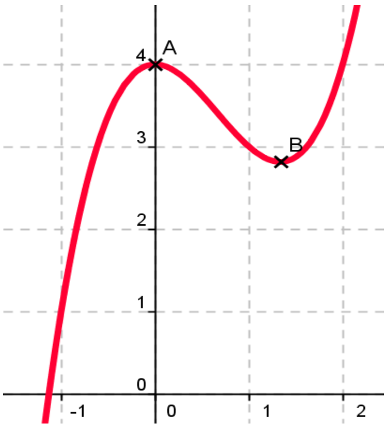
Una función alcanza en $(a, f(a))$ un **mínimo global o absoluto** si $f(a)$ es el menor valor que alcanza la función.

Una función alcanza en $(a, f(a))$ un **máximo local o relativo** si existe un intervalo que contiene a a en el que $f(a)$ es el mayor valor de la función en ese intervalo.

Una función alcanza en $(a, f(a))$ un **mínimo local o relativo** si existe un intervalo que contiene a a en el que $f(a)$ es el menor valor de la función en ese intervalo.

Ejemplo:

La función $y = x^2(x – 2) + 4$ de la gráfica del margen no alcanza ni máximos ni mínimos absolutos, pero alcanza un máximo relativo en punto A (0, 4) y un mínimo relativo en el punto B.



Autor: Jorge Muñoz

Revisora: María Molero y Emilio Díaz

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

La función de la gráfica del margen no tiene máximos absolutos, pero alcanza máximos relativos en $x = -1'25$ y en $x = 0'5$.

Tiene tres mínimos que son a la vez absolutos y relativos en $x = -2$, $x = 0$ y en $x = 1$.

Reflexiona:

Imagina una función continua y con derivada continua. Antes de que la función alcance un máximo, debe ser una función creciente, y después del máximo debe ser decreciente la función. Por tanto, antes de un máximo la derivada debe ser positiva, y después debe ser negativa.

En consecuencia si la función tiene un máximo en un punto *a* de un intervalo y es derivable en dicho punto, entonces la derivada en el máximo es cero.

Hacemos un razonamiento similar para un mínimo.

Antes de que una función alcance un mínimo, debe ser una función decreciente, y después del mínimo debe ser creciente. Por tanto, antes de un mínimo la derivada debe ser negativa, y después debe ser positiva.

En consecuencia si la función tiene un mínimo en un punto *a* de un intervalo y es derivable en dicho punto, entonces la derivada en el mínimo es cero.

Propiedad

Si una función tiene un **máximo o un mínimo** en $(a, f(a))$ y existe $f'(a)$, entonces $\mathbf{f'(a) = 0}$.

Ejemplo:

- *La función* $y = 30 + 5t^2 - 0'4t^3$ *nos da los ingresos mensuales por un nuevo producto que ha salido al mercado. Alcanzará máximos o mínimos locales en los puntos en los que se anula la derivada:* $y' = 10t - 1'2t^2 = 0 \rightarrow t = 0$ *y* $t = 25/3$. *Para valores de* $t < 0$ *la derivada es siempre negativa, ¿por qué? En* $t = 3$ *la derivada es positiva. Veamos, por ejemplo, el signo para* $t = 10$:

$$y'(10) = 10\cdot 10 - 1'2\cdot 100 = 100 - 120 = -20 < 0.$$

Podemos asegurar que para $t < 0$ la derivada es negativa, que $0 < t < 25/3$ es positiva y que para $t > 25/3$ es negativa. Por tanto la función tiene un mínimo local para $t = 0$, en el punto $(0, 0)$ y un máximo local para $t = 25/3$, en $(25/3, 145'74)$.

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- *La parábola* $y = x^2$ *tiene por derivada* $y' = 2x$*, que únicamente se anula en* $x = 0$*. Para valores negativos de x la derivada es negativa, y para valores positivos, es positiva, luego, como ya sabíamos, la parábola tiene un mínimo en* (0, 0)*, su vértice.*

Actividades resueltas

- *Un arquitecto está diseñando las ventanas para un bloque de viviendas y desea que tengan una superficie de* 1 m²*, pero que el coste de los perfiles sea el mínimo posible.*

Todas las ventanas tienen la misma luz, 1 m², por tanto su base, *x*, por su altura, *y*, debe ser igual a 1. Despejando $y = 1/x$.

El perímetro P de la ventana es igual a $P = 2x + 2y = 2x + 2/x$.

Para conseguir que el perímetro sea mínimo, derivamos e igualamos a cero:

$$P' = 2 - 2/x^2 = 0 \rightarrow 2/x^2 = 2 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = 1 \text{ o } x = -1.$$

La solución negativa no es válida como base de una ventana, luego $x = 1$, y por tanto $y = 1$.

La solución de perímetro mínimo es el cuadrado de base 1 m y altura 1 m.

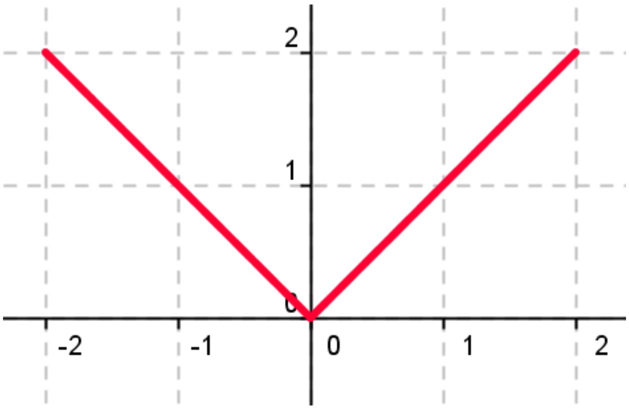
Dos observaciones importantes

1) Pueden existir máximos o mínimos en puntos donde no exista la derivada.

Por ejemplo:

La función valor absoluto de *x* tiene un mínimo en (0, 0).

$$|x| = \begin{cases} x \; si \; x > 0 \\ -x \; si \; x < 0 \end{cases}$$



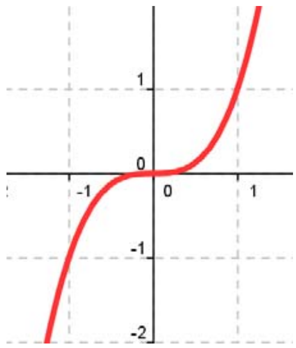
Pero la derivada no se anula en (0, 0). No existe. La derivada a la derecha de 0 vale 1, y la derivada a la izquierda vale –1. Son distintas, luego la función **no** es derivable en (0, 0).

2) Pueden existir puntos donde la derivada valga 0 y sin embargo no sean ni máximos ni mínimos.

Por ejemplo:

La función $y = x^3$ de derivada $y' = 3x^2$, que se anula en (0, 0) no tiene en dicho punto ni un máximo, ni un mínimo. La función es siempre **creciente**.

Va a tener en (0, 0) un punto de inflexión de tangente horizontal.



Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Vamos a denominar **punto singular o punto crítico** de $y = f(x)$ a los puntos en los que se anule la derivada.

En la actividad resuelta anterior de la ventana, ¿cómo sabemos que la solución obtenida es la de menor perímetro, la más barata, y que no es la más cara?

Para saber si un punto crítico es un máximo, o un mínimo, o un punto de inflexión podemos utilizar alguno de los tres criterios siguientes:

Criterio 1:

Si $f'(a) = 0$, estudiamos los valores de x próximos a a, tanto a la derecha como a la izquierda.

En el ***problema de la ventana***, calculamos el perímetro para $a = 1$, y tomamos por ejemplo valores próximos a 1, como 0'9 y 1'1, en los que calculamos el perímetro:

P(1) = 4;

P(0'9) = 2(0'9) + 2(1/0'9) = 2(1'81/0'9) > 4;

P(1'1) = 2(1'1) + 2(1/1'1) = 2(2'21/1'1) > 4.

Por tanto es un mínimo.

Sin embargo para ***la cúbica***: $y = x^3$, estudiamos puntos próximos a (0, 0), y(0'1) = 0'001; y(–0'1) = –0'001, por tanto y(–0'1) < y(0) < y(0'1), por lo que la función es creciente. No tiene ni máximo ni mínimo, como ya sabíamos.

Criterio 2:

Estudiar el signo de la derivada en puntos x próximos a a, con lo que sabremos si la función crece o decrece en esos puntos.

En el ***problema de la ventana***, sabemos que $P'(x) = 2 - 2/x^2$, por tanto:

P'(0'9) = 2 – 2/0'81 = –0'47 < 0. La función es decreciente en 0'9.

P'(1'1) = 2 – 2/1'21 = 0'35 > 0. La función es creciente en 1'1.

Si antes del punto es decreciente y después es creciente, el punto es un mínimo.

Sin embargo para ***la cúbica***: $y = x^3 \rightarrow y' = 3x^2$, estudiamos el valor de la derivada en puntos próximos a (0, 0), y'(0'1) = 0'03; y'(–0'1) = +0'03. En ambos puntos la derivada es positiva y la función es creciente, por lo que (0, 0) no es ni máximo ni mínimo.

Criterio 3:

Para que el punto $(a, f(a))$ sea un ***mínimo***, la derivada debe ser negativa antes de a, cero en a, y positiva después de a, lo que nos indica que la función derivada debe ser ***creciente***. Como $f'(x)$ es una función derivable, podemos calcular su derivada, $f''(x)$, que es la segunda derivada de la función. Para que $f'(x)$ sea creciente en $x = a$ debe ser $f''(a)$ positiva.

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Se hace un razonamiento análogo si el punto es un ***máximo***, la derivada pasa de ser positiva a anularse y luego ser negativa, lo que nos indica que la función derivada debe ser ***decreciente*** y la segunda derivada de la función en $x = a$ negativa.

Por tanto este criterio nos dice:

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ entonces $(a, f(a))$ es un mínimo.

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ entonces $(a, f(a))$ es un máximo.

En el ***ejemplo de la ventana***: $P'(x) = 2 - 2/x^2 = 2 - 2x^{-2} \to P''(x) = -2\cdot(-2)x^{-3} = 4/x^3 \to P''(1) = 4 > 0$, luego es un mínimo.

En el ejemplo de la ***cúbica***: $y = x^3 \to y' = 3x^2 \to y'' = 6x$, por lo que $y''(0) = 0$, luego el punto (0, 0) no es ni un máximo ni un mínimo. Es un punto de inflexión de tangente horizontal.

Actividades resueltas

- *Se quieren construir depósitos cilíndricos* de 4 m³ de capacidad. Se desea que la superficie de chapa sea mínima para abaratar costes. ¿Qué dimensiones son más convenientes?

El volumen de un cilindro es igual a $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ que debe ser igual a 4 m³. Por lo que $h = 4/\pi \cdot r^2$.

La superficie, S, de un cilindro es igual a:

$S = 2\pi\, r\cdot h + 2\pi\, r^2 = 2\pi\, r(4/\pi\, r^2) + 2\pi\, r^2 = 8/r + 2\pi\, r^2$.

Derivamos e igualamos a cero: $S' = -8/r^2 + 4\pi\, r = 0 \to r^3 = 8/4\pi = 2/\pi \to r = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$.

Los puntos críticos son: (0, 0) y $\left(\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}, 8\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} + \sqrt[3]{32\pi}\right)$. Si $r = 0$ no tenemos cilindro. Usamos el tercer criterio para saber si el punto crítico es máximo o mínimo: $S''(r) = -8\cdot(-2)/r^3 + 4\pi = 16/r^3 + 4\pi \to S''\left(\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}\right) = 16\pi/2 + 4\pi = 12\pi > 0$. Es un mínimo.

Actividades propuestas

50. Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = 4x^2 + 3$;

b) $y = 5x^4 - 2$;

c) $y = 3x^3 + 1$;

d) $y = 4x^4 - 2x^2 + 5$;

e) $y = 7x^3 - 3x$.

51. Se desea fabricar envases con forma de prisma recto cuadrangular de base cuadrada de forma que el volumen sea de un litro y la superficie empleada sea mínima.

52. Determina los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = 6x^3 - 2x^2 + 5x + 7$;

b) $y = x^3 - 3x + 5$;

c) $y = |x - 4|$;

d) $y = |x + 1| + |x - 2|$.

Para estar seguros de no perder ninguna posible solución conviene, para determinar todos los máximos y mínimos absolutos y relativos de una función, buscar:

1) Los puntos donde se anula la derivada: $f'(x) = 0$.

2) Los puntos donde la función no sea derivable.

3) Los valores de $f(x)$ en los extremos del dominio de definición de la función.

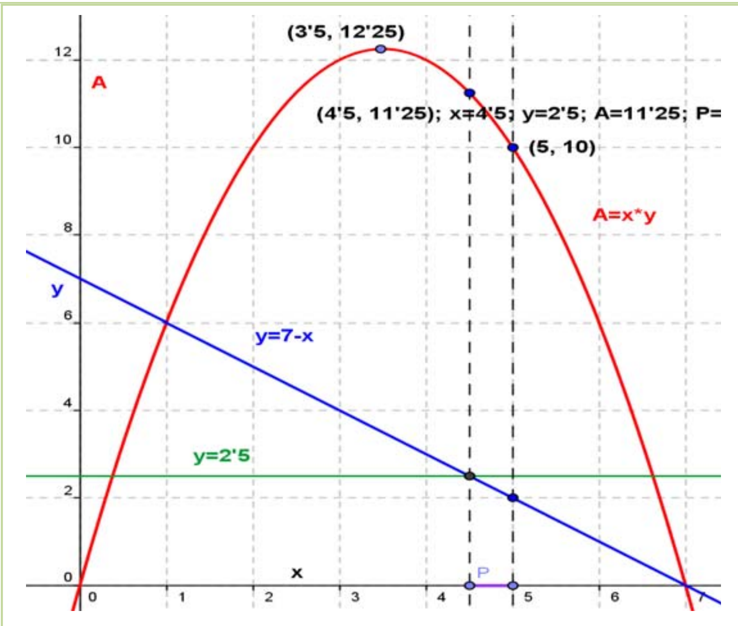
Determinamos el valor de la función en todos estos puntos y comparamos estos valores.

Actividades resueltas

- *Se desea diseñar ventanas para un edificio con unos perfiles de 14 m de longitud, de forma que tengan la máxima luz. Las paredes donde van dichas ventanas miden 2'5 m de altura y 5 m de longitud.*

Las ventanas tienen forma de rectángulo. Llamamos x a la base de las ventanas e y a su altura. El perímetro de la ventana es igual a: $14 = 2x + 2y \rightarrow y = 7 - x$.

La luz, que queremos hacer máxima es $A = x \cdot y = x \cdot (7 - x) = 7x - x^2$.

Condiciones	*Función a optimizar*	
x = base; y = altura. $y < 2'5$ m $x < 5$ m Longitud de los perfiles: 14 m. Luz máxima.	$A = x \cdot y = x \cdot (7 - x) = 7x - x^2$	 *Representación gráfica*

La función $A(x) = 7x - x^2$ es derivable en toda la recta real.

Buscamos los puntos donde se anula la derivada: $A'(x) = 7 - 2x = 0 \rightarrow x = 3'5$, $y = 3'5$, A = 12'25 m².

Pero una base de 3'5 metros, corresponde con una altura de $y = 7 - 3'5 = 3'5$ metros que no cabe en la pared. El mayor valor que puede tomar la altura es $y = 2'5$ m siendo entonces $x = 4'5$ m y una luz de A = 2'5 · 4'5 = 11'25 m².

Miramos qué ocurre en el otro extremo del dominio de definición: $4'5 \leq x \leq 5$. La mayor base que puede tener la ventana es de $x = 5$, siendo entonces $y = 2$ y la luz, A = 10 m².

Observa que la función A es una parábola, función que ya conoces muy bien. Tiene el vértice en el punto (3'5, 3'5) que es un máximo, pero no nos resuelve el problema pues no pertenece al dominio de definición. Por ello hemos debido buscar la solución en los extremos del intervalo de definición. La ventana elegida con esos perfiles de 14 m de largo debe tener una base de 4'5 m y una altura de 2'5 m, para que la luz sea máxima.

- *Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función* $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$, en el intervalo [0, 3] y en el intervalo [0, 7].

La función es derivable en todos los puntos. $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$, que se anula en 2 y 4. En el intervalo [0, 7] ambas valores pertenecen al intervalo, por lo que los valores a valorar son: 0, 2, 4 y 7. En el intervalo [0, 3] el punto 4 no pertenece, luego tenemos que valorar 0, 2 y 3.

$f(0) = 0$; $f(2) = 20$; $f(3) = 18$; $f(4) = 16$; $f(7) = 70$.

Calculamos la derivada segunda: $f''(x) = 6x - 18$, en los puntos donde se anula la derivada:

$f''(2) = -6 < 0$; $f''(4) = 6$. En (2, 20) se alcanza un máximo relativo y en (4, 16) un mínimo relativo.

Intervalo [0, 3]: Máximo absoluto y relativo en (2, 20) y mínimo absoluto en (0, 0).

Intervalo [0, 7]: Máximo absoluto en (7, 70) y mínimo absoluto en (0, 0). Máximo relativo en (2, 20) y mínimo relativo en (4, 16).

- *Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función* $f(x) = |x|$ en el intervalo [–3, 5].

La función no es derivable en (0, 0). La derivada vale 1 si x es positivo, y –1 si x es negativo, por lo que la derivada no se anula en ningún punto. Estudiamos los extremos del intervalo, –3 y 5:

$f(-3) = |-3| = 3$; $f(5) = |5| = 5$.

El mínimo absoluto de la función se alcanza en (0, 0) y el máximo absoluto en (5, 5).

Actividades propuestas

53. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en el intervalo [–4, 3] y en el intervalo [0, 5].

54. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 2|$ en el intervalo [–3, 5].

55. Determina las dimensiones de un cono de volumen mínimo inscrito en una esfera de radio R = 5 cm. (*Ayuda*: La altura del cono es igual a R + x, y el radio de la base $r^2 = R^2 - x^2$).

CURIOSIDADES. REVISTA

Interés de las derivadas

El Análisis y el Cálculo Infinitesimal han sido durante trescientos años una de las ramas más importantes de la Matemática, y las derivadas constituyen su parte central, ya que permiten comprender las ciencias físicas y la técnica. Las cuestiones que plantean proporcionan una fuente de teoría e ideas que permiten avanzar al pensamiento.

La razón de esta gran cantidad de aplicaciones se debe a que la derivada se puede interpretar como el índice de cambio de una variable respecto de otra, y las variables que explican los fenómenos se relacionan entre sí por sus índices de cambio.

Las derivadas sirven como modelo matemático para el estudio de problemas que surgen en disciplinas muy diversas. Desde sus comienzos han contribuido de manera muy notable a solucionar muchas cuestiones y a interpretar numerosos fenómenos de la naturaleza. Su origen histórico es inseparable de sus aplicaciones a las ciencias físicas, químicas, medicina, ciencias sociales e ingeniería, ya que para resolver muchos problemas significativos se requiere la determinación de una función que debe satisfacer una ecuación en la que aparece su derivada.

Isaac Newton

G. W. Leibniz

Antecedentes

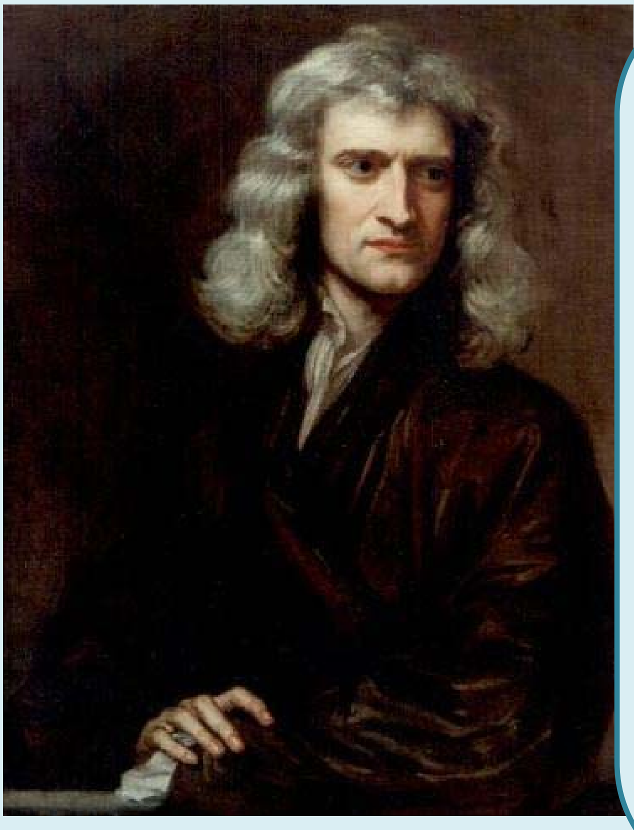
Lo infinitamente pequeño tenía para *Galileo Galilei* (1564 – 1642) una importancia más inmediata que lo infinitamente grande, puesto que lo necesitaba en su dinámica. Galileo analizó el comportamiento del movimiento de un proyectil con una componente horizontal y uniforme, y una componente vertical uniformemente acelerada, consiguiendo demostrar que la trayectoria del proyectil, despreciando la resistencia del aire, es siempre una parábola. Estudió el problema del espacio recorrido por un cuerpo en caída libre y se puede considerar que utilizó para su resolución las derivadas.

En 1638 apareció el **problema de la tractriz**, propuesto por *René Descartes* (1596 – 1650) a *Fermat*, que realmente es un problema de tangentes a una curva, (no pudo resolverlo pues no se conocía todavía el concepto de derivada), y fue resuelto en 1674 por *Leibniz* y en 1690 por *Jakob Bernoulli*, cuando ya se conocían los trabajos de *Newton* y *Leibniz*.

El concepto de derivada comienza con *Isaac Newton* (1642 - 1727) y *Gottfried Withelm Leibniz* (1646 – 1716). Dice este último *"Considerando la matemática desde el comienzo del mundo hasta la época de Newton, lo que él ha hecho es, con mucho, la mitad mejor"*. Muy pronto los científicos se dan cuenta de que **las derivadas son la expresión matemática de las leyes naturales**.

Newton

Isaac Newton (1642 – 1727) nació el mismo año en que murió *Galileo*. Los problemas que motivaron sus descubrimientos fueron el estudio de la dinámica del punto y del sólido rígido. Sus primeros descubrimientos matemáticos datan de 1665 en que expresó funciones en series de potencias, y empezó a pensar en la velocidad del cambio de magnitudes que varían de manera continua tales como áreas, longitudes, distancias, temperaturas, etc. asociando de manera conjunta ambos problemas, las series infinitas y las velocidades de cambio.



Su primera obra impresa: "*Philosophiae Naturalis **Principia** Mathematica*" fue en 1687 siendo el trabajo científico más admirado de todos los tiempos, donde es plenamente consciente del papel de la derivada. Escribió, en la segunda ley de los principios, la ecuación de una piedra que cae por acción de la gravedad en diferentes medios: aire, agua, aceite... Indica cómo evoluciona el sistema.

La influencia cultural fue tremenda. La naturaleza obedece a leyes generales. Da origen a la concepción filosófica de *Kant*, al pensamiento de la Ilustración y al determinismo científico por el que el conocimiento de estas leyes llevaría a conocer completamente el pasado y el futuro. Este concepto de que las leyes físicas se pueden expresar mediante derivadas es el único concepto de *Newton* que, en opinión de *Einstein*, sigue hoy totalmente vigente.

Actualmente está claro que el descubrimiento de *Newton* precedió al de *Leibniz* en unos diez años, así como que *Leibniz* hizo sus descubrimientos de forma paralela a los de *Newton*, aunque a *Leibniz* le corresponde la prioridad de su publicación, pues lo publicó en la revista *"Acta Eruditorum"* en 1684.

Entre sus intereses más profundos se encontraban la alquimia y la religión, temas en los que sus escritos sobrepasan con mucho en volumen a sus escritos científicos. Entre sus estudios alquímicos se encontraban temas esotéricos como la transmutación de los elementos, la piedra filosofal y el elixir de la vida.

En 1693 sufrió una gran crisis psicológica, causante de largos periodos en los que permaneció aislado, durante los que no comía ni dormía. En esta época sufrió depresión y arranques de paranoia. Tras la publicación en 1979 de un estudio que demostró una concentración de mercurio (altamente neurotóxico) quince veces mayor que la normal en el cabello de Newton, la mayoría opina que en esta época Newton se había envenenado al hacer sus experimentos alquímicos, lo que explicaría su enfermedad y los cambios en su conducta.

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) leyó con atención las obras de *Pascal* sobre la cicloide, y se dio cuenta, hacia 1673, de que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias entre las ordenadas y las abscisas, cuando estas diferencias se hacen infinitamente pequeñas. Se hacía pues necesario crear un lenguaje y una notación adecuados para tratar estos problemas, y lo elegido fue especialmente afortunado ya que facilitó el razonamiento lógico. Utilizó la notación que hoy día se emplea de *dx* y del signo de integral, fue el primero en introducir el término "*derivar*" en el sentido de "*deducir*" (en una carta de *Leibniz* a *Newton*).

El problema crucial que resolvió el cálculo de *Newton* y *Leibniz* fue el siguiente. Si una variable *y* depende de otra *x*, y se conoce la tasa de variación de *y* respecto de *x* para cambios muy pequeños de la variable *x*, lo que *Leibniz* ya denotó: $dy = f(x) \cdot dx$, entonces la determinación de *y* respecto de *x* se puede realizar mediante el cálculo de un área, lo que es conceptualmente mucho más simple. Esta idea de generalizar las operaciones de derivación e integración como inversas la una de la otra, es el núcleo fundamental de sus descubrimientos. Ya en el siglo XVII se habían resuelto muchos problemas particulares: la tractriz, la braquistócrona, la catenaria y algunos problemas isoperimétricos, pero el interés del trabajo de *Newton* y *Leibniz* reside en la generalización.

Madame de Châtelet

Gabrielle Émilie de Breteuil, (1706 - 1749), marquesa de Châtelet fue una dama francesa que tradujo los "*Principia*" de Newton y divulgó los conceptos del Cálculo en su libro "*Las instituciones de la física*". Era una dama de la alta aristocracia y fácilmente podía haber vivido una vida inmersa en los placeres superficiales, y no obstante fue una activa participante en los acontecimientos científicos que hacen de su época, el siglo de las luces, un periodo excitante.

En sus salones, además de discutir de teatro, literatura, música, filosofía... se polemizaba sobre los últimos acontecimientos científicos. ¿Podéis imaginar una marquesa estudiando matemáticas? ¿Podéis imaginar unos salones dorados y cubiertos de tapices en cuyas tertulias, en lugar de hablar de cotilleos y frivolidades, se discutiera con ardor sobre Ciencia? ¿Se deliberara acaloradamente sobre el concepto de fuerza, de masa, de derivada o de función?

Mme. de Châtelet, al traducir y analizar la obra de Newton, propagó sus ideas desde Inglaterra a la Europa continental. Quizás, gracias a ella, el determinismo científico de Newton permaneció como idea filosófica hasta mediados del siglo XIX.

Madame de Châtelet era marquesa y se dedicaba con pasión al estudio. Un cráter del planeta Venus lleva el nombre de Châtelet en su honor.

Se conserva un retrato al óleo de ella pintado por Maurice Quentin la Tour, y comentado por un viajero con estas palabras *“adornada, cargada de diamantes que parecía una Venus de la Ópera..., a diferencia de aquella, ésta estaba en la mesa de trabajo, con sus instrumento y sus libros de matemáticas...”*. En ese retrato podemos verla vestida con su traje de época, pues disfrutaba maquillándose y vistiéndose para la corte, pero con un libro delante, estudiando, y con un compás en la mano.

Escribió ***Las instituciones de la física***. Convencida de muchas de las ideas de Descartes, Leibniz y Newton escribió su libro intentando explicarlo todo mediante el razonamiento cartesiano. Así supo aunar en lo principal las teorías de los tres grandes sabios, y sin embargo estaba en contra de todas las corrientes, porque siempre encontraba algo en sus teorías con lo que no estaba de acuerdo.

Escribió también un interesante *Discurso sobre la felicidad,* en el que opinaba que la felicidad se conseguía entre otras cosas con el estudio. Escribió que el amor al estudio era más necesario para la felicidad de las mujeres, ya que es una pasión que hace que la felicidad dependa únicamente de cada persona, “¡quien dice sabio, dice feliz!”.

Hacia 1745 comenzó a traducir los *Philosophiae Naturalis* ***Principia*** *Mathematica* de Newton del latín al francés, con extensos y válidos comentarios y suplementos que facilitaban mucho la comprensión. Gracias a este trabajo se pudo leer en Francia esa obra durante dos siglos, lo que hizo avanzar la Ciencia.

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

		Ejemplos
Definición de derivada	$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$	
Cálculo de derivadas	Si $f(x) = k$ entonces $f'(x) = 0$ Si $f(x) = x^k$ entonces $f'(x) = kx^{k-1}$ Si $f(x) = g(x) + h(x)$ entonces $f'(x) = g'(x) + h'(x)$ Si $f(x) = kg(x)$ entonces $f'(x) = kg'(x)$ Si $f(x) = g(x)\cdot h(x)$ entonces $f'(x) = g'(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h'(x)$ $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ $h(x) = (f\circ g)(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$	• $y = 7x^3 + 2/x^5 \to$ $y' = 21x^2 - 10/x^{-6}$ • $y = \sqrt{x}\cdot 2x \to$ $y' = (1/2)\sqrt{x}\cdot 2x + \sqrt{x}\cdot 2$ • $y = \frac{3x}{x^2-1} \to$ $y' = \frac{3\cdot(x^2-1) - 3x\cdot(2x)}{(x^2-1)^2}$ • $y = \sqrt{x^3+2} \to$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^3+2}}\cdot 3x^2$
Recta tangente	$y = f(a) + f'(a)(x - a)$	Tangente a $y = x^3 + 2x$ en el punto (0, 0): $y = 0 + 2(x - 0) = 2x$.
Crecimiento y decrecimiento	Si $f'(a) > 0$ entonces $y = f(x)$ es creciente en $x = a$. Si $f'(a) < 0$ entonces $y = f(x)$ es decreciente en $x = a$.	$y = x^3 - 3x \to y' = 3x^2 - 3 = 0$ $\to x = 1, x = -1$. • Para $x < -1$, $y' > 0 \to y$ creciente. • Para $-1 < x < 1$, $y' < 0 \to y$ decreciente • Para $x > 1$, $y' > 0 \to y$ creciente
Máximos y mínimos	Si $(a, f(a))$ es un máximo o un mínimo de $y = f(x)$ y existe $f'(a)$ entonces $f'(a) = 0$. Si $f'(a) = 0$ entonces $(a, f(a))$ es un punto crítico. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ entonces $(a, f(a))$ es un mínimo. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ entonces $(a, f(a))$ es un máximo.	$y = x^3 - 3x \to y' = 3x^2 - 3 \to y'' = 6x$. $y'(-1) = 0$, $y''(-1) < 0$, luego $(-1, 2)$ es un máximo relativo. $y'(1) = 0$, $y''(1) > 0$, luego $(1, -2)$ es un mínimo relativo.

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Definición de derivada

1. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = x^3$ en el punto $x = 2$.
2. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = \sqrt{x}$ en $x = 1$.
3. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = 1/x^2$ en $x = 4$.
4. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = 3x^2 - 5x + 2$ en el punto de abscisa $x = 1$.
5. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = x - 3$ en $x = 2$.

Cálculo de derivadas

6. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

   a) $y = 4x^2 + 2x - 3$ b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 7x + 5$

   c) $y = x^2 - 5x + 2$ d) $y = 8x^7 - 9x^6 - 5x^3$

7. Calcula:

   a) $D(5x^2 + 7x^4 - 3x)$ b) $D(6x^5 - 4x^2 + 7x + 5x^3)$

   c) $D(x^5 - 7x^4 + 2x^3)$ d) $\frac{dy}{dx}(3x^3 - 9x^6 - 2x^8)$

8. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

   a) $y = 7x^2 + 3x - 1/x$ b) $y = 5x^3 - 2x^2 + \sqrt{x}$

   c) $y = \frac{\sqrt{x}}{(x+3)\cdot(x^2-5x+2)}$ d) $y = \frac{\sqrt{x}\cdot(x+5)}{(x^2-5)}$

9. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

   a) $y = 7x^2/3 + 3x/5 - 8/(3x)$

   b) $y = 5x^3/2 - 2x^2/3 + 6\sqrt{x}/5$

   c) $7y = 4x^3/3 - 5x^2/7 + 7/\sqrt{x}$

10. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

    a) $y = \frac{(x-1)\cdot(2x-3)}{x+2}$ b) $y = \frac{(3x^2+4)\cdot(4x-2)}{7x-1}$

    c) $y = \frac{(8x+5x^2)\cdot(2x^5-7)}{4x+6}$ d) $y = \frac{(x+9)\cdot(2x-3)}{(x+3)\cdot(x+2)}$

11. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

    a) $y = \sqrt{x^3+5}$ b) $y = \sqrt[3]{2x^3+4x^2-1}$

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

c) $y = (5x^3 + 2)^5$ d) $y = (2x^2 + 5x)^9$

12. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^3+5} \cdot (x^7 + 3x^2)^6$ b) $y = \dfrac{\sqrt[3]{2x^3+4x^2-1}}{x+1}$

c) $y = (5x^3 + 2)^5 \cdot (x^5 - 6x^8)$ d) $y = \dfrac{(2x^3-5x^2)^9}{(7x^4-5x^3)^2}$

13. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las funciones siguientes:

a) $y = (3x)^{x^5-2x^3}$ b) $y = ((2x+4)^{(5x^3+7x^2)})$

c) $y = e^{(2x^5-5x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{(2x+5)^{(x^4-6x^5)^3}}$

14. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x^5+4x^3}$ b) $y = (e^{2x^3-7x^2})^7$

c) $y = e^{(3x^5+5x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{e^{(6x^5-9x^8)^2}}$

15. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = ln((7x^5 - 2x^3)^{12}(2x + 3))$ b) $y = ln\sqrt{(3x^3+2x^2)^3}$

c) $y = ln\sqrt{\dfrac{4x^5-7x}{6x-1}}$ d) $y = ln\sqrt[3]{(x^4-2x^5)^2}$

16. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{cos(x)}{3+sen(x^2)}$ $f(x) = sen(sh^3 2x)$

b) $f(x) = ch(sh(5x))$ $f(x) = th(2x+3x^2)$

17. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 9\sqrt{sen^3(5x+2)}$ $f(x) = ln\sqrt{\dfrac{3+2cos(x)}{3-2cos(x)}}$

b) $f(x) = ch(sen(5x-2)^2)$ $f(x) = ln(cos^2(x-1))$

18. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = cos(x^5 - 7x^3) \cdot sen(x^5 - 7x^3)$ b) $y = cos^7(3x^3 - 5x^2) \cdot sen^5(3x^3 - 5x^2)$

c) $y = cos(4x^5 - 8x^3)^5$ d) $y = \sqrt[3]{cos(2x^2+4x^7)^4}$

19. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = sh(2e^{x^5} - 5x^3)^2$ b) $y = (tg(5x^3 - 3x^2))^4$

c) $y = sen(cos(tg(7x^5 - 3x^3)^2))$ d) $y = \sqrt[3]{ch(sh(2x+1))^4}$

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

20. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=sen\dfrac{3+2e^{3x}}{3-2e^{3x}}$ b) $f(x)=(3x-5x^2)ch(3x-5x^2)$

c) $f(x)=tg\dfrac{\sqrt{25-14senx}}{4+5\cos x}$ d) $f(x)=\dfrac{shx-xchx}{chx+xshx}$

21. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=ln\sqrt{e^{2shx-1}}$ b) $f(x)=arcsen\dfrac{5-3x^2}{5+3x^2}$

c) $f(x)=7arccos\dfrac{4senx+3}{5-2senx}$ d) $f(x)=arcsen\dfrac{2\cos x}{4senx+3\cos x}$

22. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=arcsen(e^{2x-3})$ b) $y=\sqrt{ln(arccosx)}$

c) $y=arctg(ln\sqrt[3]{3x-2})$ d) $y=arcsen(tg(sen(5x-1)))$

23. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=arctg\sqrt{\dfrac{3+2senx}{3-2senx}}$ b) $y=e^{arcsen\sqrt{2x-5}}$

c) $y=cos(arcsen\dfrac{4x-5}{\sqrt{5-3x^2}})$ d) $y=arcsen\dfrac{2x}{\sqrt{8-x^2}})$

24. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=arctg\sqrt{5x-7}$ b) $y=ln(\sqrt{arcsen(2x+1)})$

c) $y=arcsen(e^{4x-7})$ d) $y=arctg(arccos(sen(2x-1)))$

25. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=arg\,ch\sqrt{x-2}$ b) $y=ln(arg\,sh(2x-3))$

c) $y=argth(e^{3x-5})$ d) $y=arg\,ch\sqrt{arg\,th(x)}$

26. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=arg\,ch\sqrt{\dfrac{3+2chx}{3-2chx}}$ b) $y=\sqrt{e^{arg\,sh\sqrt{5x-2}}}$

c) $y=ch(arg\,sh\dfrac{2x-5}{\sqrt{25-9x^2}})$ d) $y=arg\,th\dfrac{\cos x}{\sqrt{4-\cos^2 x^2}})$

Aplicaciones de la derivada

27. Calcula las rectas tangentes de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x$ en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

28. Calcula las rectas tangentes de las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados:

a) $y = x^3$ en $x = 2$.
b) $y = 2x^2 + 4x - 5$ en $x = 1$.
c) $y = x^3 - 7x^2 + 3$ en $x = 0$.

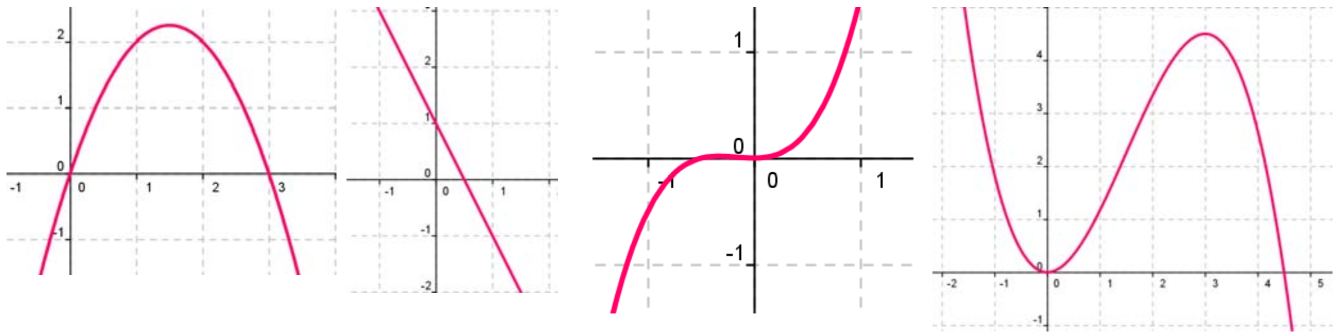
29. Indica la pendiente de la recta tangente de:

a) $y = x^3 + 3x$ en $x = 3$.
b) $y + 2x - 5 = 0$.
c) $y = 4x^3 - 5x^2 + 2$ en $x = 1$.

30. Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica $y = x^3 - 3x + 2$ en los que su tangente sea paralela: a) a la recta $y = 0$; b) a la recta $y = 6x$.

31. Determina la recta tangente de la gráfica de la función $\boldsymbol{y = \sqrt[2]{x^3}}$ en $x = 0$.

32. Si $f'(x) = x(3 - x)$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de $f(x)$?



33. Determina las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 12x$ en los puntos en los que la pendiente es 12. ¿Cuál es el menor valor que puede tener la pendiente a esta curva? ¿En qué puntos se alcanza?

34. Determina la recta tangente a la función $f(x) = x^3 - 3x$ en el punto $A(-1, 2)$. ¿En qué otro punto corta la recta tangente a la función?

35. Determina los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, que pasa por el punto $A(1, 2)$ y es tangente a la recta $y = x$ en el punto $O(0, 0)$.

36. Determina los coeficientes a, b y c para que las funciones $f(x) = x^3 + bx + c$ y $g(x) = cx - x^2$ tengan la misma recta tangente en el punto $A(1, 0)$.

37. Determina el coeficiente a, para que la función $f(x) = x^2 + a$, sea tangente a la recta $y = x$.

38. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/x^2$.

39. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/x$.

40. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Calcula sus máximos y mínimos y haz un esbozo de su gráfica.

41. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$. Calcula sus máximos y mínimos. ¿En qué punto corta al eje de ordenadas? Haz un esbozo de su gráfica.

42. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

43. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 9x$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

44. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 72x$ en el intervalo $[-7, 2]$ y en el intervalo $[0, 8]$.

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

45. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 3|$ en el intervalo [–3, 3].

Problemas

46. El espacio recorrido, en metros, por un vehículo a los t segundos de pasar por un control de radar, viene dado por: $y = 15t + 0'8t^2$. ¿Qué velocidad llevaba al pasar por el control? ¿Y a los 5 segundos? Si continúa así, ¿en qué momento pasará de los 120 km/h?

47. Sabiendo que la aceleración es la derivada de la función velocidad, calcula la aceleración del vehículo del ejercicio anterior a los $t = 0$ segundos, y a los $t = 5$ segundos. ¿Cómo es la aceleración? ¿Es constante o variable?

48. La temperatura, T, en grados, de una bola de hierro que se está calentando viene dada por $T = 200 - 500/t$, donde t es el tiempo en segundos. El radio, r, en mm, de la bola cuando la temperatura es de T grados viene dado por $r = 40 + 0'001T$. ¿A qué velocidad varía el radio cuando la temperatura es de 50º, 75º, 100º? ¿A qué velocidad varía la temperatura a los 30 segundos? ¿Y para $t = 90$ segundos? ¿A qué velocidad varía el radio a los 10 segundos, a los 30 segundos y a los 90 segundos?

49. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Tierra a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 5t^2$. Si se cae un tornillo desde la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que está a 57 m de altura), ¿a qué velocidad llegaría al suelo? ¿Y si cayera desde la segunda plataforma (que está a 115m)? ¿Y desde la tercera plataforma (que está a 274 m)?

Torre Eiffel

50. Se ha lanzado desde la superficie de la Tierra una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad de 24 m/s, y alcanza una altura $h = 24t - 4'9t^2$. A) Determina la aceleración de la gravedad terrestre. B) ¿Hasta qué altura llega la piedra? C) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar dicha altura? D) ¿Durante cuánto tiempo permanece la piedra en el aire? E) Se deja caer ahora la piedra por una grieta y tarda 10 segundos en llegar al fondo, ¿qué profundidad tiene la grieta?

51. Se ha lanzado desde la superficie de la Luna una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad de 24 m/s, y alcanza una altura $h = 24t - 0'8t^2$. A) Determina la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna. B) ¿Hasta qué altura llega la piedra? C) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar dicha altura? D) ¿Durante cuánto tiempo permanece la piedra en el aire? E) Se deja caer ahora la piedra por una grieta y tarda 20 segundos en llegar al fondo, ¿qué profundidad tiene la grieta?

La Luna

52. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Luna a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 0'83t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caía libre en la Luna al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? En la Luna se está construyendo una antena de transmisión sobre una base de hormigón que puede agrietarse si cayera un tornillo con una velocidad de 20 m/s. Para garantizar que esto no ocurra, ¿cuál debe ser la altura de la antena?

53. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la superficie de Marte a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 1'86t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caía libre en Marte al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? Determina la aceleración de la gravedad en Marte.

Marte

54. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la superficie de Júpiter a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 11'44t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caía libre en Júpiter al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? Determina la aceleración de la gravedad en Júpiter.

Júpiter

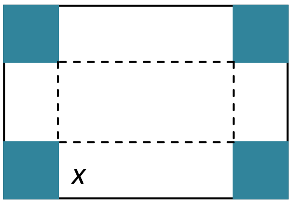
55. La función $e = f(t)$ indica el espacio recorrido, e, en metros, por un cuerpo en el tiempo t (en segundos). Determina en cada caso la función velocidad y la función aceleración:

a) $e = t^2 - 4t + 3$
b) $e = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 3$
c) $e = -t^2 + 4\,t + 3$
d) $e = (3t - 4)^2$

56. Un depósito cilíndrico de 10 metros de diámetro se llena de agua a 0'3 m³ por minuto. ¿A qué velocidad varía la altura de agua a los 2 minutos? ¿Y a los 5 minutos?

57. La distancia, d, en metros, recorrida por un trineo que se desliza por una pendiente helada, a los t segundos, viene dada por $d = 0'2t^2 + 0'01t^3$. Determina la velocidad del trineo a los 2, 4, 7 y 15 segundos. Se sabe que si la velocidad del trineo alcanza los 60 km/h le pueden fallar los frenos, ¿cuándo debería comenzar a aplicar los frenos para no perder el control?

58. Queremos construir cajas usando cartulinas rectangulares de 20 cm por 25 cm. Para ello se corta en cada esquina un cuadrado de lado x, y se dobla. ¿Qué valor debe tener el lado del cuadrado, x, recortado para que las cajas contengan un volumen máximo? *Ayuda:* Tendrás que escribir el volumen de las cajas en función de x.



59. Unos barriles para almacenar aceite son cilíndricos y tienen una capacidad de 150 litros. Si se desea construirlos de forma que su superficie lateral sea mínima, ¿cuánto debe medir su altura y el radio de su base?

60. Al hacer las pruebas de un nuevo medicamento se comprueba que según la dosis, x, en miligramos, que se administre, el porcentaje de curaciones, y, viene dado por: y=100–80/x+5. Sin embargo el medicamento tiene efectos secundarios ya que perjudica al riñón. El número de enfermos a los que el tratamiento produce efectos secundarios aumenta un 2 % por cada miligramo que se aumenta la dosis. ¿Podrías ayudar a determinar la dosis de medicamento adecuada? Razona la respuesta.

61. Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba y alcanza una altura $h = 1'6t - 0'16t^2$ metros al cabo de t segundos. ¿Qué altura alcanza la piedra?

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: María Molero y Emilio Díaz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica cuál de las siguientes expresiones es la definición de derivada de una función en $x = a$:

a) $\lim_{b \to x} \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$ b) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

c) $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ d) $\lim_{h \to 0} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$

2. La derivada de $y = \sqrt{x} \cdot (x - 1)$ en $x = 1$ es:

a) 0 b) 1/2 c) 1 d) 2

3. La derivada de $y = \frac{x^2+1}{x^3+3}$ en $x = 2$ es:

a) 15/11 b) –10/25 c) –16/121 d) 1/3

4. La derivada de $y = e^{x^2+3}$ es:

a) $y' = 2x \cdot e^{x^2+3}$ b) $y' = 2(e^x)^2 \cdot e^x$ c) $y' = 3 + e^{x^2} \cdot 2x$ d) $y' = 2e^{x^2}$

5. La derivada $y = cos(x^3)$ es:

a) $y' = 3(cos(x))^2 \cdot (-sen(x^3))$ b) $y' = -sen(x^3) \cdot 3x^2$

c) $y' = -sen(x^3) \cdot cos(3x^2)$ d) $y' = 3(cos(x))^2 \cdot (-sen(x))$

6. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 5 + 2x + 3x^2 - 2x^3$ en $x = 1$ es:

a) $y = -2x - 6$ b) $y = x + 8$ c) $y = 2x + 6$ d) $y = 8 + 2x$

7. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 3x^2 - 2x^3$ en $x = 0$ es:

a) $y = 2x + 3$ b) $y = x + 8$ c) $y = 6x$ d) $y = 0$

8. La función $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 1$ en $x = 1$ es:

a) creciente b) decreciente c) alcanza un mínimo d) alcanza un máximo

9. Si la derivada de una cierta función es: $y' = (x - 4)x$ entonces los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función son:

a) $x < 0$, decreciente; $0 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente

b) $x < 0$, decreciente; $0 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente

c) $x < 0$, creciente; $0 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente

d) $x < 0$, creciente; $0 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente

10. La función $y = 3x^2 - 2x^3$ alcanza los siguientes máximos y mínimos:

a) (0, 0) máximo y (1, 1) mínimo b) (–1, 5) máximo y (1, 1) mínimo

c) (6, –324) mínimo y (1, 1) máximo d) (0, 0) mínimo y (1, 1) máximo