MATEMÁTICAS: 4ºB ESO
Capítulo 4:
Ecuaciones y sistemas

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Hernández

Revisora: María Molero

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

Los matemáticos han tardado cerca de tres mil años en comprender y resolver ecuaciones tan sencillas y que tu conoces tan bien cómo $ax + b = 0$. Ya los egipcios resolvían problemas que se pueden considerar de ecuaciones aunque no existía la notación algebraica. El matemático griego *Diofanto* en el siglo III resolvió ecuaciones de primer y segundo grado. En el siglo XV hubo un desafío para premiar a quien resolviera una ecuación de tercer grado. En el siglo XIX se demostró que no existe una fórmula general que resuelva las ecuaciones de quinto grado. Para imponer que la ecuación $ax + b = 0$ tenga siempre solución, el conjunto numérico de los números naturales debe ampliarse con los números negativos. Para imponer que la ecuación $ax = b$ tenga siempre solución, el conjunto numérico de los números enteros debe ampliarse con los números fraccionarios. Para imponer que la ecuación $x^2 = a$, $a > 0$, recuerda $x^2 = 2$, tenga solución, el conjunto numérico debe ampliarse con los números irracionales. Pero la ecuación $x^2 + 1 = 0$, todavía no tiene solución en el conjunto numérico de los números reales. El próximo curso se ampliará el dominio a los números complejos.

En este capítulo repasaremos la solución de ecuaciones de segundo grado y sistemas lineales, que ya conoces, y ampliaremos con ecuaciones y sistemas nuevos.

Autora: Raquel Hernández

Revisora: María Molero

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

1.1. Concepto de ecuaciones de segundo grado

Recuerda que:

Una **ecuación de segundo grado** es una ecuación polinómica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Las ecuaciones de segundo grado se pueden escribir de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde *a, b* y *c* son números reales, con $a \neq 0$.

Ejemplo:

a) *Son ecuaciones de 2º grado:*

$$2x^2 - 7x + 4 = 0; \qquad -9x^2 + 2x - 5 = 0; \qquad 6x^2 - (1/2)x - 3{,}25 = 0$$

b) *Los coeficientes de las ecuaciones de* 2º grado son números reales, por lo tanto pueden ser fracciones o raíces. Por ejemplo:

$$\frac{9}{2}x^2 - \sqrt{3}x + \frac{2}{5} = 0\,; \quad \frac{7}{3}x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{4}{9} = 0\,; \quad -5{,}8x^2 + 1{,}7x - 7{,}02 = 0; \quad \sqrt{5}x^2 + \frac{3}{2}x - \sqrt[3]{2} = 0.$$

Actividades propuestas

1. Indica si son ecuaciones de segundo grado las siguientes ecuaciones:

a) $3x^2 - \sqrt{7}x + 5 = 0$ b) $4{,}7x^2 - 6{,}25 = 0$ c) $7x^2 - \frac{2}{x} + 5x = 0$

d) $2xy^2 - 5 = 0$ e) $33 - 2{,}35x = 0$ f) $9x^2 - 52\sqrt{x} + 3'2 = 0$

2. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son *a*, *b* y *c.*

a) $3 - 8x^2 + 10x = 0$ b) $-3{,}4x^2 + 7{,}8x = 0$

c) $6x^2 - 1 = 0$ d) $1{,}25x^2 - 3{,}47x + 2{,}75 = 0$.

1.2. Resolución de ecuaciones de 2º grado completas

Recuerda que:

Se llama **ecuación de segundo grado completa** a aquella que tiene valores distintos de cero para *a*, *b* y *c*.

Para resolver las ecuaciones de segundo grado completas se utiliza la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula nos permite calcular las dos soluciones de la ecuación.

Llamamos **discriminante** a la parte de la fórmula que está en el interior de la raíz:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *Resuelve la ecuación de segundo grado* $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Primero debemos saber quiénes son *a*, *b* y *c:*

$$a = 1;\ b = -3;\ c = 2.$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula, obtenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

Por lo tanto, las dos soluciones son:

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = 2; \qquad x_2 = \frac{3-1}{2} = 1.$$

En efecto, $2^2 - 3\cdot 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$, y $1^2 - 3\cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$, luego 2 y 1 son soluciones de la ecuación.

Actividades propuestas

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

a) $x^2 - 8x + 7 = 0$ b) $2x^2 + 3x - 12 = 0$

c) $10x^2 - 9x + 50 = 0$ d) $x^2 - 13x + 22 = 0$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 3\cdot\frac{x-1}{5} = 6x^2 - \frac{8x+7}{5}$; b) $2\cdot\frac{x-7}{5} - \frac{3-2x}{x} = 10$; c) $5x\cdot(x-3) + 4(x^2-5) + 10 = -10$;

d) $5(x^2-1) + 3(x^2-5) + 4 = 7$; e) $\frac{2-5x^2}{3x} - \frac{5}{3} = \frac{4x-7}{6}$; f) $\frac{2-3x^2}{5x} - \frac{4}{3} = \frac{2x-1}{15}$.

1.3. Número de soluciones de una ecuación de 2º grado completa

Recuerda que:

Antes hemos definido lo que era el **discriminante**, ¿te acuerdas?

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Para saber cuántas soluciones tiene una ecuación de 2º grado, nos vamos a fijar en el signo del discriminante.

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene **dos soluciones reales y distintas**.

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales iguales, (una **solución doble**).

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación **no tiene solución**.

El motivo es muy sencillo, la raíz cuadrada de un número real negativo no es un número real, no existe.

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- *La ecuación* $x^2 - 7x + 10 = 0$ *tiene como discriminante*:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4\cdot 1\cdot 10 = 49 - 40 = 9 > 0$$

Por lo tanto, la ecuación dada tiene 2 soluciones reales y distintas, 2 y 5. (*Comprobación:* $5^2 - 7\cdot 5 + 10 = 25 - 35 + 10 = 0$ y $(2)^2 - 7(2) + 10 = 4 - 14 + 10 = 0$).

- *La ecuación* $x^2 - 6x + 9 = 0$ *tiene como discriminante*:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

Por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones reales iguales. Se puede escribir como:

$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0$, que tiene la solución doble $x = 3$.

- La ecuación $x^2 + 4x + 10 = 0$ *tiene como discriminante*:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4\cdot 1\cdot (10) = 16 - 40 = -24 < 0$$

Por lo tanto, la ecuación no tiene solución real. Ningún número real verifica la ecuación.

Actividades propuestas

5. Averigua cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $9x^2 + 4x + 7 = 0$ **b)** $3x^2 - 5x + 2 = 0$

c) $x^2 - 9x - 12 = 0$ **d)** $2x^2 - 7x + 9 = 0$.

1.4. Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas

Recuerda que:

Llamamos **ecuación de 2º grado incompleta** a aquella ecuación de segundo grado en la que el coeficiente b vale 0 (falta b), o el coeficiente c vale 0 (falta c).

Observa: Si el coeficiente a vale cero no es una ecuación de segundo grado.

Ejemplo:

- *La ecuación de segundo grado* $3x^2 - 22 = 0$ es incompleta porque el coeficiente $b = 0$, es decir, falta b.
- *La ecuación de segundo grado* $2x^2 - 7x = 0$ es incompleta porque no tiene c, es decir, $c = 0$.

Una ecuación de segundo grado incompleta también se puede resolver utilizando la fórmula de las completas pero es un proceso más lento y es más fácil equivocarse.

Si el **coeficiente b = 0:** Despejamos la incógnita normalmente, como hacíamos en las ecuaciones de primer grado:

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Si $\frac{-c}{a} > 0$ tiene dos soluciones distintas, si $\frac{-c}{a} < 0$ no existe solución.

Si el **coeficiente *c* = 0:** Sacamos factor común:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x\cdot(ax + b) = 0.$$

Para que el producto de dos factores valga cero, uno de los factores debe valer cero.

Por tanto $x = 0$, o $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$.

Resumen

Si el **coeficiente *b* = 0,** $ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$.

Si el **coeficiente *c* = 0,** $ax^2 + bx = 0$, sacamos factor común: $x = 0$ y $x = \frac{-b}{a}$.

Ejemplo:

- *En la ecuación* $2x^2 - 200 = 0$ *falta la* b.

Para resolverla despejamos la incógnita, es decir, x^2:

$$2x^2 - 200 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 200 \Rightarrow x^2 = 200/2 = 100$$

Una vez que llegamos aquí, nos falta quitar ese cuadrado que lleva nuestra incógnita. Para ello, hacemos la raíz cuadrada en los 2 miembros de la ecuación:

$$\boldsymbol{x = \pm\sqrt{100} = \pm 10}.$$

Así hemos obtenido las dos soluciones de nuestra ecuación, 10 y –10.

En efecto, $2\cdot 10^2 - 200 = 2\cdot 100 - 200 = 0$, y $2\cdot(-10)^2 - 200 = 2\cdot 100 - 200 = 0$.

Ejemplo:

- *En la ecuación* $3x^2 - 21x = 0$ falta la c.

Para resolverla, sacamos factor común:

$$3x^2 - 21x = 0 \Rightarrow 3x\cdot(x - 21) = 0$$

Una vez que llegamos aquí, tenemos dos opciones

1) $3x = 0 \Rightarrow x = 0$.

2) $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$.

Así hemos obtenido las dos soluciones de la ecuación $x = 0$ y $x = 7$.

En efecto, $3\cdot 0^2 - 21\cdot 0 = 0$, y $3\cdot(7)^2 - 21\cdot 7 = 3\cdot 49 - 21\cdot 7 = 147 - 147 = 0$.

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *Resuelve la ecuación de segundo grado* $2x^2 - 50 = 0$:

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la *b*. Por lo tanto, despejamos la incógnita:

$$2x^2 - 50 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 50/2 = 25 \Rightarrow \text{Las soluciones son 5 y } -5.$$

- *Resuelve la ecuación de segundo grado* $x^2 + 11x = 0$:

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la *c*.

Por lo tanto, sacamos factor común: $x^2 + 11x = 0 \Rightarrow x(x + 11) = 0$.

Obtenemos las dos soluciones: $x = 0$ y $x + 11 = 0 \Rightarrow x = -11$.

Las soluciones son 0 y –11.

Actividades propuestas

6. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $5x^2 + 75x = 0$ b) $4x^2 - 160 = 0$

c) $x^2 - 64 = 0$ d) $3x^2 + 2x = 0$

e) $9x^2 - 49 = 0$ f) $3x^2 - 33x = 0$.

7. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $3x^2 + 18x = 0$ b) $5x^2 - 180 = 0$

c) $x^2 - 49 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$

e) $4x^2 - 25 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$.

1.5. Suma y producto de las soluciones en una ecuación de segundo grado

Recuerda que:

Si en una ecuación de segundo grado: $x^2 + bx + c = 0$, con $a = 1$, conocemos sus soluciones: x_1 y x_2 sabemos que podemos escribir la ecuación de forma factorizada:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Hacemos operaciones:

$$x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0,$$

por lo que el coeficiente *c* es igual al producto de las soluciones y la suma de las soluciones es igual al opuesto del coeficiente *b*, es decir, –*b*.

$$\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = c;\ x_1 + x_2 = -b.}$$

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Si la ecuación es $ax^2 + bx + c = 0$, dividiendo por a, ya tenemos una de coeficiente $a = 1$, y obtenemos que:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}\ ;\ x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Esta propiedad nos permite, en ocasiones, resolver mentalmente algunas ecuaciones de segundo grado.

Actividades resueltas

- *Resuelve mentalmente la ecuación* $x^2 + x - 2 = 0$.

Las soluciones son 1 y –2, pues su producto es –2 y su suma –1.

- *Resuelve mentalmente la ecuación* $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Buscamos, mentalmente dos números cuyo producto sea 6 y cuya suma sea 5. En efecto, $2 \cdot 3 = 6$, y $2 + 3 = 5$, luego las soluciones de la ecuación son 2 y 3.

- *Resuelve mentalmente la ecuación* $x^2 - 8x + 16 = 0$.

El producto debe ser 16. Probamos con 4 como solución, y en efecto $4 + 4 = 8$. Las soluciones son la raíz 4 doble.

- *Resuelve mentalmente la ecuación* $x^2 + x - 2 = 0$.

Las soluciones son –2 y 1, pues su producto es –2 y su suma –1.

Actividades propuestas

8. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $2x^2 + 8x = 0$ b) $x^2 + 6x - 27 = 0$

c) $x^2 - 81 = 0$ d) $x^2 - 10x + 22 = 0$

e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - 5x - 24 = 0$

9. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 5 y 9.

10. El perímetro de un rectángulo mide 20 cm y su área 24 cm². Calcula mentalmente sus dimensiones.

11. Si 3 es una solución de $x^2 - 7x + a = 0$, ¿cuánto vale a?

2. OTROS TIPOS DE ECUACIONES

Durante siglos los algebristas han buscado fórmulas, como la que ya conoces de la ecuación de segundo grado, que resolviera las ecuaciones de tercer grado, de cuarto, de quinto… sin éxito a partir del quinto grado. Las fórmulas para resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grado son complicadas. Sólo sabemos resolver de forma sencilla algunas de estas ecuaciones.

Ejemplo:

- Resuelve: $(x - 5) \cdot (x - 3) \cdot (x + 2) \cdot (x - 9) \cdot (x - 6) = 0$.

Es una ecuación **polinómica** de grado cinco, pero al estar factorizada sabemos resolverla pues para que el producto de varios factores sea cero, uno de ellos debe valer cero. Igualando a cero cada factor tenemos que las soluciones son 5, 3, –2, 9 y 6.

2.1. Ecuaciones bicuadradas

Una **ecuación bicuadrada** es una ecuación de la forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$.

Para resolverla, hacemos el cambio $x^n = t$, convirtiéndola así en una ecuación de segundo grado de fácil resolución.

Cuando hayamos calculado el valor de t, deshacemos el cambio efectuado, $x = \sqrt[n]{t}$ para obtener la solución x.

Las ecuaciones bicuadradas más comunes son las de cuarto grado

Ejemplo:

- *Para resolver la ecuación bicuadrada* $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$, hacemos el cambio obteniendo la ecuación de segundo grado $t^2 - 10t + 9 = 0$.

Resolvemos dicha ecuación de segundo grado:

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 8}{2}$$

$$t_1 = \frac{10+8}{2} = 9 \quad y \quad t_2 = \frac{10-8}{2} = 1$$

Deshacemos el cambio para obtener los valores de x:

$$Si\ t_1 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

$$Si\ t_2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *La ecuación* $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ es una ecuación polinómica de cuarto grado, pero con una forma muy especial, es una ecuación **bicuadrada**, porque podemos transformarla en una ecuación de segundo grado llamando a x^2 por ejemplo, t.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

Una solución de la ecuación de segundo grado es $t = 4$, y la otra es $t = 1$.

Por tanto si $t = x^2 = 4$, entonces $x = 2$ y $x = -2$.

Y si $t = x^2 = 1$, entonces $x = 1$ y $x = -1$.

Nuestra ecuación de cuarto grado tiene cuatro soluciones: 2, –2, 1 y –1.

Actividades propuestas

12. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $(x - 7) \cdot (x - 2) \cdot (x + 5) \cdot (x - 3) \cdot (x - 11) = 0$ b) $3(x - 5) \cdot (x - 7) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) = 0$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ b) $x^4 + 12x^2 + 35 = 0$ c) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$.

14. Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ d) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$.

2.2. Ecuaciones racionales

Si hay incógnitas en el denominador, la ecuación se denomina **racional**, y se resuelve de forma similar, quitando denominadores.

Para resolver ecuaciones **racionales**, se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Ejemplos:

- *Resuelve* $\frac{3x - 8 + 9x}{2x} = 4$

Quitamos denominadores:

$$\frac{\mathbf{3x - 12 + 9x}}{\mathbf{2x}} = \mathbf{4} \Rightarrow 3x - 12 + 9x = 8x \Rightarrow 3x + 9x - 8x = 12 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3.$$

- *Para resolver la ecuación racional* $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2-4}$, primero calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$\text{m.c.m.}(x - 2, x + 2, x^2 - 4) = (x - 2) \cdot (x + 2).$$

Multiplicamos toda la ecuación por el mínimo común múltiplo, obteniendo la nueva ecuación:

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2}+\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x+2}=\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x^2-4} \Rightarrow (x+2)+(x-2)=1.$$

Resolvemos dicha ecuación y así obtenemos el resultado:

$$(x+2)+(x-2)=1 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Actividades propuestas

15. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:

a) $\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{x-1}=0$ b) $\frac{1}{x-6}+\frac{x}{x-2}=\frac{1}{x^2-8x+12}$ c) $\frac{3}{x}=1+\frac{x-13}{6}$.

2.3. Ecuaciones radicales

Si hay incógnitas dentro de un radical, la ecuación se denomina **irracional**, y se resuelve aislando el radical y elevando al cuadrado (o al índice del radical). Ahora es preciso tener una precaución, al elevar al cuadrado, la ecuación obtenida no es equivalente, se pueden haber añadido soluciones. Siempre es conveniente comprobar el resultado, pero en este caso, es necesario.

Una **ecuación radical o irracional** es aquella que tiene la incógnita bajo el signo de la raíz.

Para resolver ecuaciones radicales, seguimos los siguientes pasos:

1.- Se aísla un radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos, aunque tengan también radicales.

2.- Se elevan al cuadrado los dos miembros.

3.- Si quedan más radicales, se vuelve a despejar uno y se eleva al cuadrado, hasta que no quede ninguno.

4.- Se resuelve la ecuación obtenida.

5.- Se comprueba que la solución es válida.

Ejemplo:

- *Vamos a resolver la ecuación radical* $\sqrt{2x-3}+1=x$.

1.- Se aísla un radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos:

$$\sqrt{2x-3}+1=x \Rightarrow \sqrt{2x-3}=x-1.$$

2.- Se elevan al cuadrado los dos miembros:

$$\sqrt{2x-3}=x-1 \Rightarrow 2x-3=(x-1)^2 \Rightarrow 2x-3=x^2-2x+1.$$

3.- Se resuelve la ecuación obtenida:

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$2x-3=x^2-2x+1 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm 0}{2}=2 \text{ doble.}$$

4.- Se comprueba que la solución es válida:

$$\sqrt{2\cdot 2-3}+1=2 \Rightarrow \sqrt{1}+1=2 \Rightarrow 2=2.$$

Actividades resueltas

- *Resuelve la ecuación radical* $\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}=2$.

1.- Se aísla un radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos, aunque tengan también radicales:

$$\sqrt{x+6}=2+\sqrt{x-2}.$$

2.- Se elevan al cuadrado los dos miembros:

$$\left(\sqrt{x+6}\right)^2=\left(2+\sqrt{x-2}\right)^2 \Rightarrow x+6=4+4\sqrt{x-2}+x-2.$$

Se simplifica la ecuación obtenida:

$$x+6=4+4\sqrt{x-2}+x-2 \Rightarrow x+6-4-x+2=4\sqrt{x-2} \Rightarrow 4=4\sqrt{x-2}.$$

3.- Volvemos ahora al paso 2 para eliminar la raíz que tenemos aún:

$$4=4\sqrt{x-2} \Rightarrow 4^2=\left(4\sqrt{x-2}\right)^2 \Rightarrow 16=16(x-2).$$

4.- Se resuelve la ecuación obtenida:

$$16=16(x-2) \Rightarrow 1=x-2 \Rightarrow x=3.$$

5.- Se comprueba que la solución es válida:

$$\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}=2 \Rightarrow \sqrt{3+6}-\sqrt{3-2}=2 \Rightarrow \sqrt{9}-\sqrt{1}=2 \Rightarrow 3-1=2 \Rightarrow 2=2.$$

La solución $x = 3$ verifica la ecuación.

Actividades propuestas

16. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $\sqrt{5x+4}-1=2x$ b) $\sqrt{x+19}+1=\sqrt{2x+4}$ c) $3\sqrt{x-1}+11=2x$.

2.4. Otras ecuaciones

Hay también ecuaciones trigonométricas, logarítmicas, exponenciales. Así, si la incógnita está en un exponente la ecuación se denomina **exponencial**. Si podemos expresar los dos miembros de la ecuación como potencias de la misma base, se igualan los exponentes.

Ejemplo:

- Resuelve: $2^{2x} = \frac{1}{16}$

Expresamos la ecuación como potencias de una misma base: $2^{2x} = \frac{1}{16} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{-4}$

Igualamos los exponentes: $2x = -4 \Rightarrow x = -2$.

Actividades propuestas

17. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $(x-9)\cdot(x-1)\cdot(x+24)\cdot(x-5)\cdot(x-3)=0$ b) $3(x-5)\cdot(x-9)\cdot(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-4)=0$

18. Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes:

a) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ b) $x^4 - 21x^2 + 12100 = 0$ c) $x^4 - 45x^2 + 234 = 0$ d) $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$

19. Resuelve las ecuaciones racionales siguientes:

a) $\frac{2x-1+7x}{3x} = \frac{3}{x} - 2$ b) $\frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{4}{3}$ d) $\frac{2x-3}{x} + \frac{1}{x} = 1$

20. Resuelve las ecuaciones irracionales siguientes:

a) $5 + \sqrt{x-1} = x+2$ b) $\sqrt{x-2} + 3\sqrt{x-2} = x+1$ c) $\sqrt{x} - 4 = x - 1$ d) $7 + \sqrt{x+4} = x+9$

21. Resuelve las ecuaciones exponenciales siguientes:

a) $5^{3x} = \frac{1}{625}$ b) $2^{2x} \cdot 4^{x} = \frac{1}{16}$ c) $2^{x+5} + 2^{x+4} + 2^{x+3} = 28$

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

3.1. Concepto de sistema de ecuaciones lineales

Recuerda que:

Una **ecuación** con varias incógnitas es una igualdad que las relaciona.

Por ejemplo:

$x^2 + y^2 = 25$, es la ecuación de una circunferencia de centro el origen y radio 5.

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones con varias incógnitas.

Por ejemplo:

$$\begin{cases} \mathbf{x^2 + y^2 = 25} \\ \mathbf{7x + 2y = 0} \end{cases}$$

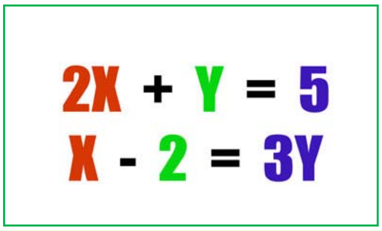
La primera ecuación es la de una circunferencia de centro el origen y radio 5, y la segunda es la ecuación de una recta que pasa por el origen. Las soluciones del sistema son los puntos de intersección entre la circunferencia y la recta.

Se llama **solución del sistema** a cada uno de los conjuntos de números que verifican todas las ecuaciones del sistema.

Dos sistemas son **equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones.

Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos incógnitas se puede expresar de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$



donde *a*, *b*, *a'* y *b'* son números reales que se denominan **coeficientes** y *c* y *c*' también son números reales llamados **términos independientes**.

Llamamos **solución** del sistema al par de valores (*x*, *y*) que satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

Se dice que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes**, cuando tienen la misma solución.

Ejemplo:

- *Son sistemas de ecuaciones lineales, por ejemplo:*

$$\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$$

Ejemplo:

- ***No** es un sistema lineal* $\begin{cases} \mathbf{9xy + 2y = 5} \\ \mathbf{3x - xy = 4} \end{cases}$ porque tiene términos en *xy*, aunque es un sistema de dos ecuaciones.

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Tampoco lo es $\begin{cases} 5x^2 + 9y = 2 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$ porque tiene un término en x^2, aunque también es un sistema de dos ecuaciones.

Actividades propuestas

22. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 7xy + 5y = 2 \\ 3x - 5y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2y - 4x = 3 \\ 3x - 5y = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 4 = 2y \\ 6x + 8y = 9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x^2 + 3y = 5 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

3.2. Clasificación de sistemas de ecuaciones

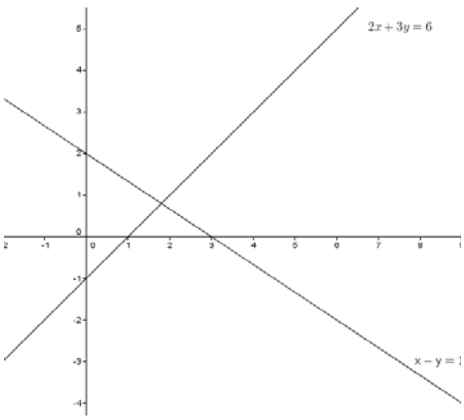
Recuerda que:

En un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada una de las ecuaciones representa una recta en el plano. Estas rectas pueden estar posicionadas entre sí de tres maneras distintas, lo que nos ayudará a clasificar nuestro sistema en:

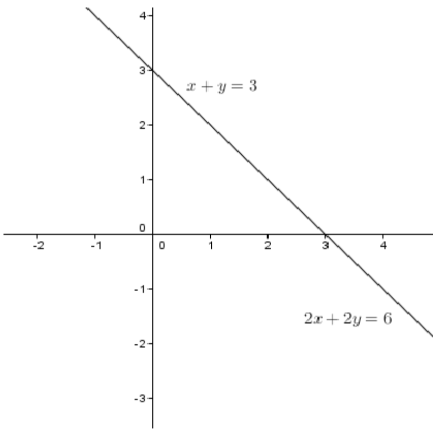
1) **Compatible determinado**: el sistema tiene una única solución, por lo que nuestras rectas son **SECANTES**

2) **Compatible indeterminado**: el sistema tiene infinitas soluciones, por lo que las rectas son **COINCIDENTES**

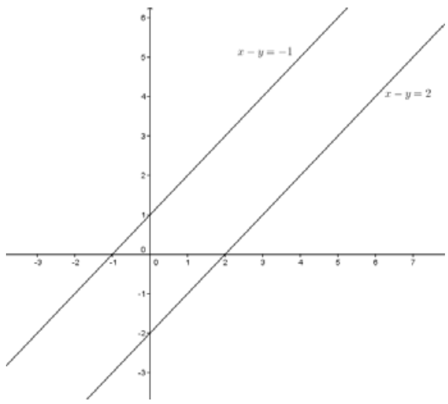
3) **Incompatible**: el sistema no tiene solución, por lo que las rectas son **PARALELAS.**



Compatible determinado



Compatible indeterminado



Incompatible

Actividades resueltas

- *Añade una ecuación a* $x - 2y = 2$ para que el sistema resultante sea:

  a) Compatible determinado.

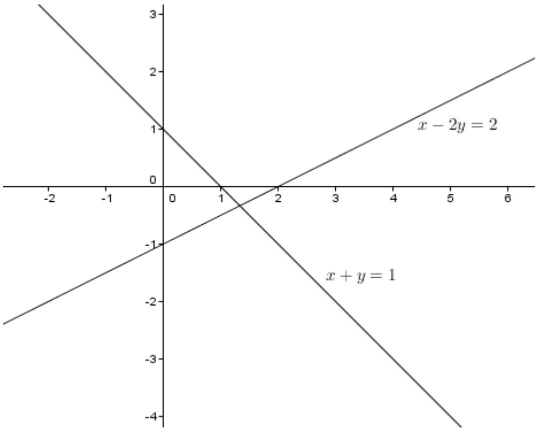
  b) Incompatible.

  c) Compatible indeterminado.

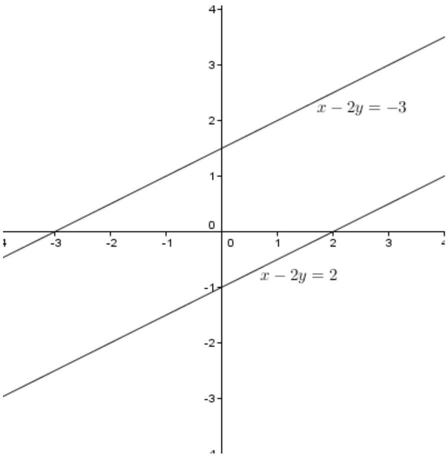
Solución:

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

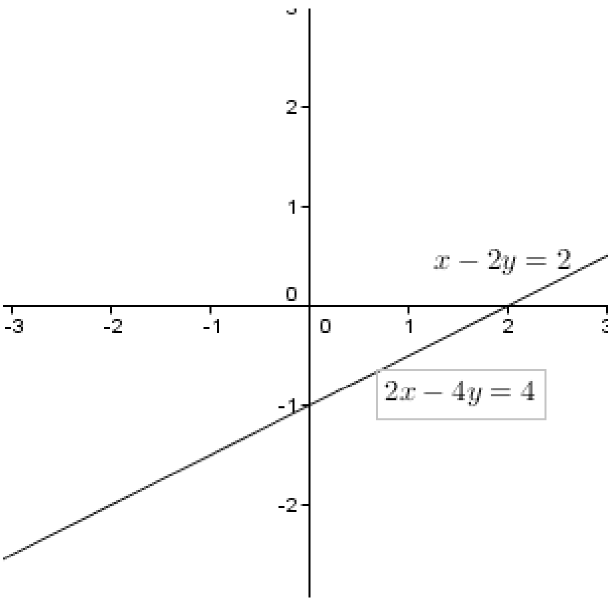
a) Para que el sistema sea compatible determinado, añadiremos una ecuación que no tenga los mismos coeficientes que la que nos da el ejercicio. Por ejemplo, $x + y = 1$.



b) Para que sea incompatible, los coeficientes tienen que ser los mismos pero tener diferente término independiente. Por ejemplo $x - 2y = -3$.



c) Para que sea compatible indeterminado, pondremos una ecuación proporcional a la que tenemos. Por ejemplo $2x - 4y = 4$.



Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

23. Representa los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ -y + 3x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 9y = 9 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$

24. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + 2x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x - 6y = 6 \end{cases}$

25. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ -3x + y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 4y = 4 \end{cases}$

3.3. Resolución de sistemas por el método de sustitución

Recuerda que:

El **método de sustitución** consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones del sistema y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación. Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podremos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, obtenemos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

- *Vamos a resolver el sistema* $\begin{cases} \mathbf{2x - 3y = 1} \\ \mathbf{x + 2y = 4} \end{cases}$ *por el método de sustitución:*

Despejamos x de la segunda ecuación: $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x = 4 - 2y \end{cases}$

y lo sustituimos en la primera:

$$\begin{cases} 2(4 - 2y) - 3y = 1 \\ x = 3 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 - 4y - 3y = 1 \\ x = 3 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4y - 3y = 1 - 8 \\ x = 3 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7y = -7 \\ x = 3 - 2y \end{cases} \Rightarrow y = 1.$$

Con el valor obtenido de y, calculamos la x: $x = 4 - 2y \Rightarrow x = 4 - 2\cdot 1 = 2$.

La solución es: $\begin{cases} \mathbf{x = 2} \\ \mathbf{y = 1} \end{cases}$.

Comprobamos: $\begin{cases} 2\cdot 2 - 3\cdot 1 = 4 - 3 = 1 \\ 2 + 2\cdot 1 = 4 \end{cases}$.

Actividades propuestas

26. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 2x + 5y = -6 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 4x + y = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

27. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x+4y=26 \\ x-2y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+4y=26 \\ 3x+y=24 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=8 \\ 2x+3y=14 \end{cases}$

3.4. Resolución de sistemas por el método de igualación

Recuerda que:

El **método de igualación** consiste en despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema e igualar los resultados obtenidos. Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podremos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, calculamos el valor de la otra incógnita

Ejemplo:

- *Vamos a resolver el sistema* $\begin{cases} \mathbf{2x-3y=1} \\ \mathbf{x+2y=4} \end{cases}$ *por el método de igualación:*

Despejamos la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema:

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3y+1}{2} \\ x=4-2y \end{cases}.$$

Igualamos ahora los resultados obtenidos y resolvemos la ecuación resultante:

$$\begin{cases} \dfrac{3y+1}{2}=4-2y \\ x=4-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y+1=8-4y \\ x=4-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y+4y=8-1 \\ x=4-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y=7 \\ x=4-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=4-2y \end{cases}.$$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*: $\begin{cases} y=1 \\ x=4-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=4-2\cdot 1=2 \end{cases}.$

La solución es: $\begin{cases} \mathbf{x=2} \\ \mathbf{y=1} \end{cases}.$

Comprobamos: $\begin{cases} 2\cdot 2-3\cdot 1=4-3=1 \\ 2+2\cdot 1=4 \end{cases}.$

Actividades propuestas

28. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} x+y=11 \\ -x+3y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-5y=4 \\ 2x+7y=-11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-3y=5 \\ 3x+4y=11 \end{cases}$

29. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 3x+y=2 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ 4x+5y=12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-2y=7 \\ x+3y=8 \end{cases}$

4.5. Resolución de sistemas por el método de reducción

Recuerda que:

El **método de reducción** consiste en eliminar una de las incógnitas sumando las dos ecuaciones. Para ello se multiplican una o ambas ecuaciones por un número de modo que los coeficientes de *x* o *y* sean iguales pero de signo contrario.

Ejemplo:

- *Vamos a resolver el sistema* $\begin{cases} \mathbf{2x-3y=1} \\ \mathbf{x+2y=4} \end{cases}$ *por el método de reducción:*

Multiplicamos la segunda ecuación por –2 para que los coeficientes de la *x* sean iguales pero de signo contrario y sumamos las ecuaciones obtenidas:

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x+2y=4 \end{cases} \xrightarrow[\cdot(-2)]{} \begin{cases} 2x-3y=1 \\ -2x-4y=-8 \end{cases} \xrightarrow{sumamos} \begin{cases} 2x-3y=1 \\ -7y=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$$\begin{cases} 2x-3\cdot(1)=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{2}=2 \\ y=1 \end{cases}$$

La solución es: $\begin{cases} \mathbf{x=2} \\ \mathbf{y=1} \end{cases}$

Comprobamos: $\begin{cases} 2\cdot2-3\cdot1=4-3=1 \\ 2+2\cdot1=4 \end{cases}$.

Actividades propuestas

30. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} x+2y=3 \\ -2x-5y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 3x+y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ x-4y=5 \end{cases}$

31. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x+y=8 \\ x-5y=-9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+3y=9 \\ x+2y=10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-2y=7 \end{cases}$

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

5. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

5.1. Concepto de sistema de ecuaciones no lineales

Un **sistema de ecuaciones es no lineal** cuando al menos una de sus ecuaciones no es de primer grado

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Donde *a, b, a'* y *b'* son números reales que se denominan **coeficientes** y *c* y *c'* también son números reales llamados **términos independientes**.

Llamamos **solución** del sistema al par (*x, y*) de valores que satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

Ejemplo:

- *Son sistemas de ecuaciones **no** lineales, por ejemplo:*

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ x\cdot y=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y=7 \\ x+y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \sqrt{x}+y=3 \\ x+5y=7 \end{cases}$

Actividades propuestas

32. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x\cdot y+2y=6 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5y-x=4 \\ 2x-3y=-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x-2=y \\ 3x+5y=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+y=2 \\ 3x+y^2=4 \end{cases}$

5.2. Resolución de sistemas de ecuaciones no lineales

La resolución de este tipo de sistemas se suele hacer por el método de **sustitución** mediante los siguientes pasos:

1.- Se despeja una incógnita de una de las ecuaciones, a ser posible de la de primer grado.

2.- Se sustituye la incógnita despejada en la otra ecuación.

3.- Se resuelve la ecuación resultante.

4.- Cada uno de los valores obtenidos se sustituye en la otra ecuación, se obtienen así los valores correspondientes de la otra incógnita.

Actividades resueltas

- *Vamos a resolver el sistema no lineal* $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases}$

1.- Se despeja una incógnita de una de las ecuaciones, a ser posible de la de primer grado:

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=7-x \end{cases}$$

2.- Se sustituye la incógnita despejada en la otra ecuación:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=7-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+(7-x)^2=25 \\ y=7-x \end{cases}$$

3.- Se resuelve la ecuación resultante:

$$\begin{cases} x^2+(7-x)^2=25 \\ y=7-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+49-14x+x^2=25 \\ y=7-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2-14x+24=0 \\ y=7-x \end{cases}$$

$$x=\frac{14\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot 2\cdot 24}}{2\cdot 2}=\frac{14\pm 2}{4} \Rightarrow x_1=4 \wedge x_2=3.$$

4.- Cada uno de los valores obtenidos se sustituye en la otra ecuación, se obtienen así los valores correspondientes de la otra incógnita:

Si $x = 3$, $y = 7 – 3 = 4$

Si $x = 4$, $y = 7 – 4 = 3$

Las soluciones son **(3, 4)** y **(4, 3)**.

5.- *Comprobación*:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^2+4^2=9+16=25 \\ 3+4=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^2+3^2=16+9=25 \\ 4+3=7 \end{cases}$$

Actividades propuestas

33. Resuelve los siguientes sistemas no lineales:

a) $\begin{cases} x\cdot y+2=4x \\ y-x=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y^2-x^2=5 \\ 5x-3y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=7 \\ x\cdot y=12 \end{cases}$

34. Resuelve los siguientes sistemas y comprueba gráficamente las soluciones:

a) $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x+y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=2 \end{cases}$ c) $\left.\begin{matrix} x^2+y^2=81 \\ xy=4 \end{matrix}\right\}$

d) $\begin{cases} x^2+2y^2=17 \\ x+y=5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ xy=6 \end{cases}$ f) $\left.\begin{matrix} x^2+y^2=18 \\ y=x \end{matrix}\right\}$

35. La trayectoria de un proyectil es una parábola de ecuación: $y = -x^2 + 5x$, y la trayectoria de un avión es una recta de ecuación: $y = 3x$. ¿En qué puntos coinciden ambas trayectorias? Representa gráficamente la recta y la parábola para comprobar el resultado.

36. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3y^2 = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3 \\ 5x^2 - 2y^2 = 5 \end{cases}$ *Ayuda*: Utiliza el método de reducción:

c) $\begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{3}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - 4y = -3 \\ xy = 1 \end{cases}$ e) $\left.\begin{array}{r} x + y - \frac{y}{x} = 1 \\ x + y = 2 \end{array}\right\}$

5.3. Sistemas de ecuaciones lineales de más de dos incógnitas

La mejor forma de resolver sistemas lineales de más de dos incógnitas es ir sustituyendo el sistema por otro equivalente de forma que cada vez se consiga que sean ceros los coeficientes de más incógnitas. Este procedimiento se denomina ***Método de Gauss***.

Actividades resueltas

Para resolver el sistema: $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + 4y - 2z = 3 \end{cases}$, dejamos la primera ecuación sin modificar. Queremos que la segunda ecuación tenga un cero como coeficiente de la "*x*", para ello la multiplicamos por 2 y le restamos la primera. Para que la tercera ecuación tenga un cero como coeficiente de la "*x*", la multiplicamos por 2 y le restamos la primera:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + 4y - 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 7y - z = 6 \end{cases}$$

Ahora podemos resolver el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas formado por las dos últimas ecuaciones, o continuar con nuestro procedimiento. Para conseguir que en la tercera ecuación el coeficiente de la "*y*" sea un cero multiplicamos la tercera ecuación por 3 y la segunda por 7 y las restamos:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 7y - z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 0 + 32z = 32 \end{cases}$$

y ahora ya podemos despejar cada una de las incógnitas de forma ordenada:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 0 + z = \frac{32}{32} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + (1) - 3(1) = 0 \\ 3y + 5(1) = 8 \to y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

37. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y - 3z = -2 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ x + 2y + 2z = 4 \\ 3x - 2y - 3z = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 5 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ x - 2y - 3z = -6 \end{cases}$

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

3.1. Resolución de problemas mediante ecuaciones de 2º grado

Para resolver problemas por medio de ecuaciones de 2º grado, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

1.- Comprender el enunciado.

2.- Identificar la incógnita.

3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico.

4.- Plantear la ecuación y resolverla.

5.- Comprobar la solución obtenida.

Actividades resueltas

Vamos a resolver el siguiente problema:

- *¿Cuál es el número natural cuyo quíntuplo aumentado en 6 unidades es igual a su cuadrado?*

Una vez comprendido el enunciado, identificamos la incógnita, que en este caso, es el número que estamos buscando.

2.- Número buscado = $\boldsymbol{x}$

3.- Traducimos ahora el problema al lenguaje algebraico:

$$5x + 6 = x^2$$

4.- Resolvemos la ecuación:

$$5x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = 6; \qquad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

Solución: Como el enunciado dice "número natural" el número buscado es el 6.

5.- *Comprobación*: En efecto $5 \cdot 6 + 6 = 36 = 6^2$.

Actividades propuestas

38. ¿Qué número multiplicado por 4 es 5 unidades menor que su cuadrado?

39. En una clase deciden que todos van a enviar una carta al resto de compañeros. Uno dice: ¡Vamos a escribir 380 cartas! Calcula el número de alumnos que hay en la clase.

40. Calcula tres números consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 365.

41. Una fotografía rectangular mide 14 cm de base y 10 cm de altura. Alrededor de la foto hay un margen de igual anchura para la base que para la altura. Halla el ancho del margen, sabiendo que el área total de la foto y el margen es de 252 cm^2.

42. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Cuál es el número?

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

43. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 20 cm y la base mide 4 cm, calcula los lados del triángulo y su área.

44. Una hoja de papel cuadrada se dobla por la mitad. El rectángulo resultante tiene un área de 8 cm^2. ¿Cuál es perímetro de dicho rectángulo?

45. Un padre dice: "El producto de la edad de mi hijo hace 5 años por el de su edad hace 3 años es mi edad actual, que son 39 años". Calcula la edad del hijo.

46. Halla las dimensiones de rectángulo cuya área es 21 m^2, sabiendo que sus lados se diferencian en 4 metros.

47. En un triángulo rectángulo el cateto mayor mide 3 cm menos que la hipotenusa y 4 cm más que el otro cateto. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?

48. Halla dos números pares consecutivos cuyo producto sea 224.

49. Halla tres números impares consecutivos tales que si al cuadrado del mayor se le restan los cuadrados de los otros dos se obtiene como resultado 15.

3.2. Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

Para resolver problemas por medio de sistemas de ecuaciones, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

1.- Comprender el enunciado.

2.- Identificar las incógnitas.

3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico.

4.- Plantear el sistema y resolverlo.

5.- Comprobar la solución obtenida.

Actividades resueltas

Vamos a resolver el siguiente problema:

- *La suma de las edades de un padre y su hijo es 39 y su diferencia 25. ¿Cuál es la edad de cada uno?*

Una vez comprendido el enunciado, identificamos las incógnitas que, en este caso, son la edad del padre y el hijo

2.- Edad del padre = x

Edad del hijo = y

3.- Pasamos el enunciado a lenguaje algebraico:

La suma de sus edades es 39:

$$x + y = 39$$

Y su diferencia 25:

$$x - y = 25$$

4.- Planteamos el sistema y lo resolvemos por el método que nos resulte más sencillo. En este caso, lo hacemos por reducción:

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$\begin{cases} x+y=39 \\ x-y=25 \end{cases} \xrightarrow{sumamos} \begin{cases} x+y=39 \\ 2x+0=64 \end{cases} \Rightarrow x = 64/2 = 32$$

$x + y = 39 \Rightarrow 32 + y = 39 \Rightarrow y = 39 - 32 = 7$.

Solución: El padre tiene 32 años y el hijo tiene 7 años.

5.- *Comprobación:* En efecto, la suma de las edades es 32 + 7 = 39 y la diferencia es 32 – 7 = 25.

Actividades propuestas

50. La suma de las edades de María y Alfonso son 65 años. La edad de Alfonso menos la mitad de la edad de María es igual a 74. ¿Qué edad tienen cada uno?

51. La suma de las edades de Mariló y Javier es 32 años. Dentro de 7 años, la edad de Javier será igual a la edad de Mariló más 20 años. ¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad?

52. Encuentra dos números cuya diferencia sea 24 y su suma sea 104.

53. Un hotel tiene 42 habitaciones (individuales y dobles) y 62 camas, ¿cuántas habitaciones tiene de cada tipo?

54. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 10 cm y las longitudes de sus dos catetos suman 14 cm. Calcula el área del triángulo.

55. Nieves le pregunta a Miriam por sus calificaciones en Matemáticas y en Lengua. Miriam le dice "La suma de mis calificaciones es 19 y el producto 90". Nieves le da la enhorabuena. ¿Qué calificaciones obtuvo?

56. De un número de tres cifras se sabe que suman 12, que la suma de sus cuadrados es 62, y que la cifra de las decenas es igual a la de las centenas más 1. ¿Qué número es?

57. Se tienen tres zumos compuestos del siguiente modo:

El primero de 40 dl de naranja, 50 dl de limón y 90 dl de pomelo.

El segundo de 30 dl de naranja, 30 dl de limón y 50 dl de pomelo.

El tercero de 20 dl de naranja, 40 dl de limón y 40 dl de pomelo.

Se pide qué volumen habrá de tomarse de cada uno de los zumos anteriores para formar un nuevo zumo de 34 dl de naranja, 46 dl de limón y 67 dl de pomelo.

58. Se venden tres especies de cereales: trigo, cebada y mijo. Cada kg de trigo se vende por 2 €, el de la cebada por 1 € y el de mijo por 0.5 €. Si se vende 200 kg en total y se obtiene por la venta 150 €, ¿cuántos volúmenes de cada cereal se han vendido?

59. Se desea mezclar harina de 2 €/kg con harina de 1 €/kg para obtener una mezcla de 1,2 €/kg. ¿Cuántos kg deberemos poner de cada precio para obtener 300 kg de mezcla?

60. En una tienda hay dos tipos de juguetes, los de tipo A que utilizan 2 pilas y los de tipo B que utilizan 5 pilas. Si en total en la tienda hay 30 juguetes y 120 pilas, ¿cuántos juguetes hay de cada tipo?

61. Un peatón sale de una ciudad A y se dirige a una ciudad B que está a 15 km de distancia a una velocidad de 4 km/h, y en el mismo momento sale un ciclista de la ciudad B a una velocidad de 16 km/h y se dirige hacia A, ¿cuánto tiempo lleva el peatón caminando en el momento del encuentro? ¿A qué distancia de B se cruzan?

CURIOSIDADES. REVISTA

El número de oro está en todas partes

¿Conoces un número irracional cuya parte decimal sea igual a la de su cuadrado?

Para encontrarlo debemos resolver la ecuación: $x^2 = x + n$, donde n sea un número entero. Imaginemos que n sea igual a 1, entonces:

$$x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \begin{cases} 1{,}618033988749\ldots \\ -0{,}618033988749\ldots \end{cases}$$

¡El número de oro!

¿Conoces un número cuya parte decimal sea igual a la de su inverso?

Planteamos de nuevo la ecuación: $1/x = x + n$, donde n sea un número entero. Imaginemos que n sea igual a –1, entonces:

$1/x = x - 1 \Rightarrow 1 = x^2 - x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$

¡Tenemos la misma ecuación de antes! ¡La solución vuelve a ser el número de oro!

¡El número de oro, Φ, está en todas partes! Ya lo habíamos encontrado en pintura, arquitectura, esculturas, y en la propia naturaleza. Ahora lo encontramos en las ecuaciones.

El brócoli es un conocido ejemplo de fractal. Cada uno de sus trocitos es similar al completo, con un cambio de escala. También está relacionado con el número de oro y la sucesión de *Fibonacci*. Si contamos las espirales que se forman son dos número sucesivos de la sucesión de *Fibonacci*, hacia la derecha son 8 y hacia la izquierda son 13. Recuerda la sucesión es: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13….

¿Sabrías calcular $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}$? Hay infinitas raíces cuadradas encadenadas. Como si a infinito le sumo 1 no varía, una forma de encontrar su valor es volver a sustituir x en la igualdad: $x = \sqrt{1+x}$ y resolver la ecuación:

$$x = \sqrt{1+x} \Rightarrow x^2 = 1 + x \Rightarrow$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{1+4}}{2} = \Phi$$

¿Sabrías calcular $x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$? Es una fracción continua. Hay infinitas fracciones encadenadas. Para calcularla de nuevo sustituimos x: $x = 1 + \frac{1}{x}$ y resolvemos la ecuación: $x^2 = x + 1$ que ya sabemos que su solución positiva es Φ.

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Obtención de la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado.

$ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$

$\Downarrow$

$ax^2 + bx = -c$

$\Downarrow$ Multiplicamos por $4a$

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

$\Downarrow$ Sumamos b^2

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$

$\Downarrow$ Completamos cuadrados

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

$\Downarrow$ Hallamos la raíz cuadrada

$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$\Downarrow$Despejamos la x

$2ax = -b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

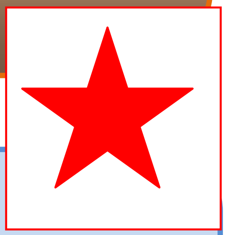
$\Downarrow$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tres ecuaciones de segundo grado interesantes

$x^2 = 2$

Esta ecuación nos aparece al aplicar el Teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo isósceles de lados iguales a 1, o al calcular la diagonal de un cuadrado de lado 1. Su solución es la longitud de la hipotenusa o de la diagonal. Tiene de interesante que se demuestra que dicha solución NO es un número racional, un número que pueda escribirse como cociente de dos números enteros.



$x + 1 = x^2$

También se puede escribir como: $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$ que es una proporción, donde x toma el valor $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx$ 1,618… que es el número de oro, otro número irracional

$x^2 = -1$

La tercera ecuación no tiene solución real, ningún número real al elevarlo al cuadrado puede dar un número negativo, pero si ampliamos el campo real con su raíz, $\sqrt{-1} = i$, resulta que ya todas las ecuaciones de segundo grado tienen solución, y a los números $a + b \cdot i$ se les llama **números complejos**.

Emmy Noether fue una matemática alemana de origen judío cuyos trabajos en Álgebra permitieron resolver el problema de la conservación de la energía.

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Problemas

Algunos problemas de ingenio que se resuelven, (o no) por ecuaciones o sistemas.

Los cocos

Tres marineros y un mono recogen cocos. Antes de repartirlos se duermen. Por la noche un marinero reparte el montón de cocos en tres partes iguales, le sobra uno que se lo da al mono, y se guarda su parte. Un segundo marinero hace la misma operación, le sobra también uno y se guarda su parte. Lo mismo hace el tercer marinero. A la mañana siguiente reparten los cocos y ahora el reparto es exacto. ¿Cuántos cocos había?

La piscina

La piscina del polideportivo municipal se ha tenido que vaciar por un problema de contaminación. Este proceso se ha realizado en tres fases para poder utilizar el agua en la limpieza de las instalaciones, primero se ha sacado la tercera parte, después la mitad del resto y aún quedan 150 m^3 de agua. ¿Qué capacidad tiene la piscina?

Ayuda: No plantees una ecuación. Haz un diagrama.

Las perlas del rajá

Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que se hiciera del siguiente modo: La hija mayor tomaría una perla y un séptimo de lo que quedara. La segunda hija recibiría dos perlas y un séptimo de lo que restante. La tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedara. Y así sucesivamente. Hecha la división cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. ¿Cuántas perlas había? ¿Cuántas hijas tenía el rajá?

La invitación

Juan invita a Marta y a Elena a merendar. Prepara una limonada y se dispone a servirla. Marta la quiere con poco limón y Elena con mucho. Juan ha puesto el zumo de limón y el agua en jarras iguales y con la misma cantidad. Para complacer a sus invitadas toma un vaso de la jarra con limón y lo echa en la del agua, y a continuación toma un vaso del mismo tamaño de la mezcla y lo echa en la del limón. ¿Habrá más limón en la jarra del agua o agua en la jarra del limón?

Ayuda: Este problema es muy antiguo. Parece de ecuaciones pero así es muy difícil. Aunque pensando un poco, resulta muy sencillo.

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

		Ejemplos
Ecuación de segundo grado	Es una ecuación algebraica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$.	$-4x^2 + 5x - 8/3 = 0$
Resolución de ecuaciones de segundo grado completas	Se usa la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 7x + 10 = 0$: $x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2}$ $x_1 = 5$, $x_2 = 2$
Discriminante	$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9$
Número de soluciones de una ecuación de segundo grado	Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, tiene dos soluciones reales y distintas Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, tiene una solución doble. Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene solución	$x^2 - 3x - 4 = 0$: $\Delta = 25 > 0$, tiene dos soluciones 4 y -1. $x^2 - 4x + 4 = 0$: $\Delta = 0$, tiene una raíz doble: $x = 2$. $x^2 + 3x + 8 = 0$: $\Delta = -23$. No tiene solución real
Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = \mathbf{0}$ y $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 50 = 0$: $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$ $3x^2 - 18x = 0 \Rightarrow 3x(x - 9) = 0 \Rightarrow$ $x_1 = 0$; $x_2 = 9$.
Suma y producto de raíces	$x_1\, x_2 = \frac{c}{a}$; $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$	$x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x_1 = 5$; $x_2 = 2$.
Sistema de ecuaciones lineales	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} 6x + 5y = 8 \\ 4x - 2y = -3 \end{cases}$
Clasificación	**Compatible determinado**: Una única solución, el punto de intersección. Las rectas son **secantes**: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -2x - y = 1 \end{cases}$ **Compatible indeterminado**: Infinitas soluciones, por lo que las rectas son **coincidentes**: $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$ **Incompatible**: No tiene solución, las rectas son **paralelas**: $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 9 \end{cases}$	
Métodos de resolución	**Sustitución:** despejar una incógnita y sustituir en la otra ecuación. **Igualación:** despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones. **Reducción:** sumar las dos ecuaciones, multiplicándolas por números adecuados.	

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Ecuaciones de segundo grado

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) $-x^2 - 7x - 12 = 0$ b) $x(-5 + x) = 3$ c) $3x^2 = 30x$

d) $3(x + 1) - x(5x + 2) = 7$ e) $3(7x - 2) + 3x(x - 4) = 1$ f) $4(x^2 - 4) - 5(3 + 2x) = -7$

g) $(3x + 2)\cdot(4x - 2) = -6x - 2$ h) $x\cdot(x + 5) = 168$ i) $2(3x^2 - 5x + 2) - 5x(6x - 3) = -2$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado con denominadores:

a) $\frac{x^2-3}{2} - \frac{x+2}{4} = 5$ b) $\frac{x^2-5}{2} + \frac{2x^2-3x+7}{2} = 5$ c) $\frac{2x^2+1}{5} + \frac{x+3}{10} = 1$

d) $\frac{2-2x^2}{3} + \frac{4x-3}{2} = \frac{5}{6}$ e) $\frac{x^2-1}{3} - \frac{5x-9}{6} = 4x-3$ f) $\frac{2x+3x^2}{7} - \frac{3x-8}{14} = 1$

3. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 - 3x - 10 = 0$ b) $x^2 + 3x - 10 = 0$ c) $x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 - 7x + 10 = 0$ e) $x(-1 + x) = 0$ f) $2x^2 = 50$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$ h) $x^2 - x - 6 = 0$ i) $x^2 + x - 6 = 0$

4. Factoriza las ecuaciones del problema anterior. Así, si las soluciones son 2 y 3, escribe:

$5x^2 - 25x + 30 = 0 \Leftrightarrow 5(x - 2)\cdot(x - 3) = 0$. Observa que si el coeficiente de x^2 fuese distinto de 1 los factores tienen que estar multiplicados por dicho coeficiente.

5. Cuando el coeficiente b es par ($b = 2B$), puedes simplificar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm 2\sqrt{B^2 - ac}}{2a} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - ac}}{a}$$

Así para resolver $x^2 - 8x + 12 = 0$ basta decir $x = 4 \pm \sqrt{16 - 12} = 4 \pm 2$, luego sus soluciones son 6 y 2.

Utiliza esa expresión para resolver:

a) $x^2 - 2x + 8 = 0$ b) $x^2 - 6x - 10 = 0$ c) $x^2 + 4x + 9 = 0$

6. Resuelve mentalmente las ecuaciones siguientes, luego desarrolla las expresiones y utiliza la fórmula general para volver a resolverlas.

a) $(x - 2)\cdot(x - 5) = 0$ b) $(x + 1)\cdot(x - 6) = 0$ c) $(x - 3)\cdot(x - 5) = 0$

d) $(x - 4)\cdot(x + 7) = 0$ e) $(x + 8)\cdot(x - 9) = 0$ f) $(x - 2)\cdot(x + 3) = 0$

7. Determina el número de soluciones reales que tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado calculando su discriminante, y luego resuélvelas.

a) $x^2 + 7x - 3 = 0$ b) $5x^2 + 7x - 8 = 0$ c) $2x^2 + 3x + 9 = 0$

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

d) $2x^2 - 2x + 7 = 0$ e) $3x^2 - 2x - 7 = 0$ f) $4x^2 + x - 5 = 0$

8. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que no tengan ninguna solución real. *Ayuda*: Utiliza el discriminante.

9. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan una solución doble.

10. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan dos soluciones reales y distintas.

11. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que no tengan solución real.

12. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $x^5 - 37x^3 + 36x = 0$ b) $x^3 - 2x^2 - 5x = 0$ c) $2x^3 - x^2 - 4x = 0$

d) $x^4 - 5x^2 - 2 = 0$ e) $2x^4 = 32x^2 - 96$ f) $x(x - 3)(2x + 3)(3x - 5) = 0$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando un cambio de variable:

a) $x^8 + 81 = 82x^4$ b) $x^4 - 24x^2 + 144 = 0$ c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ d) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:

a) $3x + \frac{2}{x} = 1$ b) $\frac{2}{3x} + \frac{5}{6x} = x$ c) $\frac{2}{x-5} + 3 = \frac{1}{x-2}$ d) $\frac{3x}{2-x} - 4x = 2$

e) $\frac{3}{x+2} = \frac{2(3x+1)}{x-2} + 1$ f) $\frac{3x-1}{x+2} - \frac{5+2x}{2x} = 4$ g) $\frac{5x-3}{x+1} - \frac{5+3x}{x-1} = 2$

h) $\frac{4}{1-x} = \frac{3}{x} + \frac{1}{x-x^2}$ i) $\frac{5x}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} = \frac{x}{3}$ j) $\frac{1}{3} = \frac{x-4}{6-x}$

15. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $x = -2 + \sqrt{5 + 4x^2}$ b) $\sqrt{16 - x} = x - 4$ c) $5 + \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 2x$

d) $\sqrt{x} - \sqrt{x-2} = 5$ e) $\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1} + 2 = 0$ f) $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 3$

g) $5\sqrt{x-2} + 1 = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ h) $\sqrt{x-2} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} = 2$ i) $\sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} = 3$

16. Resuelve las ecuaciones siguientes: a) $3^{2x} = \frac{1}{81}$ b) $2^{2x} = \frac{1}{1024}$

Sistemas lineales de ecuaciones

17. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 4y = 5 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$

18. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} -3x + 2y = -1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 4y = 10 \\ -8x + 3y = -13 \end{cases}$

19. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

a) $\begin{cases} 7x-2y=5 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+5y=20 \\ -x-6y=-14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-6y=0 \\ -5x+2y=-9 \end{cases}$

20. Resuelve de forma gráfica los siguientes sistemas

a) $\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=5 \\ x-7y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-y=1 \\ -7x+5y=3 \end{cases}$

21. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{5}-\dfrac{3y-1}{2}=-1 \\ \dfrac{3x+1}{2}+\dfrac{3y-1}{4}=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}-\dfrac{5y+7}{6}=-2 \\ 4x+y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{5x+1}{2}+\dfrac{2y-5}{3}=4 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

22. Copia en tu cuaderno y completa los siguientes sistemas incompletos de forma que se cumpla lo que se pide en cada uno:

Compatible indeterminado — Incompatible — Su solución sea $x = 2$ e $y = 1$

a) $\begin{cases} (\ )x+2y=(\ ) \\ 3x-y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -3x+y=1 \\ (\ )x+y=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3y=(\ ) \\ (\ )x+2y=8 \end{cases}$

Incompatible — Su solución sea $x = -1$ e $y = 1$ — Compatible indeterminado

d) $\begin{cases} 2x-3y=-4 \\ 6x+(\ )y=(\ ) \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x+(\ )y=-1 \\ (\ )x+y=5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (\ )x+8y=(\ ) \\ x+2y=-3 \end{cases}$

23. Escribe tres sistemas lineales que sean incompatibles.
24. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles indeterminados.
25. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles determinados.
26. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación y comprueba la solución gráficamente. ¿De qué tipo es cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x+6y=4 \\ 7x-3y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=-3 \\ 3x-3y=-9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=4 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$

Problemas

27. En una tienda alquilan bicicletas y triciclos. Si tienen 30 vehículos con un total de 80 ruedas, ¿cuántas bicicletas y cuántos triciclos tienen?
28. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 12 le faltan 64 unidades para completar su cuadrado?
29. Descompón 12 en dos factores cuya suma sea 7.
30. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 616. ¿Qué número es?
31. La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 130. Determina dichos números.
32. Van cargados un asno y un mulo. El asno se quejaba del peso que llevaba encima. El mulo le

contestó: Si yo llevara uno de tus sacos, llevaría el doble de carga que tú, pero si tú tomas uno de los míos, los dos llevaremos igual carga. ¿Cuántos sacos lleva cada uno?

33. ¿Qué número multiplicado por 3 es 28 unidades menor que su cuadrado?

34. Calcula tres números consecutivos cuya suma de cuadrados es 110.

35. Dentro de 2 años, la edad de Raquel será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 10 años. ¿Qué edad tiene Raquel?

36. Dos números se diferencian en 3 unidades y la suma de sus cuadrados es 185. ¿Cuáles son dichos números?

37. La suma de dos números es 2 y su producto es –80, ¿de qué números se trata?

38. María quiere formar bandejas de un kilogramo con caramelos y bombones. Si los caramelos le cuestan a 3 euros el kilo y los bombones a 7 euros el kilo, y quiere que el precio de cada bandeja sea de 5 euros, ¿qué cantidad deberá poner de cada producto? Si quiere formar 100 bandejas, ¿qué cantidad de caramelos y de bombones va a necesitar?

39. Determina los catetos de un triángulo rectángulo cuya suma es 17 cm y la hipotenusa de dicho triángulo mide 13 cm.

40. El producto de dos números es 6 y la suma de sus cuadrados 13. Calcula dichos números

41. La suma de dos números es 12. El doble del primero más el triple del segundo es 31. ¿De qué números se trata?

42. En un garaje hay 30 vehículos entre coches y motos. Si en total hay 80 ruedas, ¿cuántos coches y motos hay en el garaje?

43. La edad actual de Luis es el doble de la de Miriam. Dentro de 10 años, sus edades sumarán 50. ¿Cuántos años tienen actualmente Luis y Miriam?

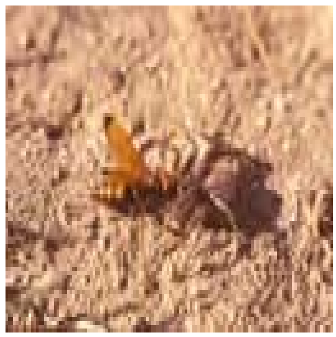
44. En mi clase hay 25 personas. Nos han regalado a cada chica 3 pegatinas y a cada chico 2 chapas. Si en total había 65 regalos. ¿Cuántos chicos y chicas somos en clase?

45. Entre mi abuelo y mi hermano tienen 80 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edad tiene cada uno?

46. Tres bocadillos y un refresco cuestan 8 €. Cuatro bocadillos y dos refrescos cuestan 12 €. ¿Cuál es el precio del bocadillo y el refresco?

47. En una granja hay gallinas y ovejas. Si se cuentan las cabezas, son 40. Si se cuentan las patas, son 100. ¿Cuántos gallinas y ovejas hay en la granja?

48. Un rectángulo tiene un perímetro de 180 metros. Si el largo es 10 metros mayor que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?



49. En un monedero hay billetes de 5 € y 10 €. Si en total hay 10 billetes y 75 €, ¿cuántas billetes de cada valor hay en el monedero?

50. En una pelea entre arañas y avispas, hay 13 cabezas y 90 patas. Sabiendo que una araña tiene 8 patas y una avispa 6, ¿cuántas moscas y arañas hay en la pelea?

51. Una clase tiene 30 estudiantes, y el número de alumnas es doble al de alumnos, ¿cuántos chicos y chicas hay?

52. Nieves tiene 9 años más que su hermano Daniel, y su madre tiene 50 años. Dentro de 2 años la edad de la madre será doble de la suma de

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

las edades de sus hijos, ¿qué edades tienen?

53. Se mezclan 18 kg de arroz de 1,3 € el kilogramo con 24 kg de arroz de precio desconocido, resultando el precio de la mezcla de 1,7 € el kg. ¿Qué precio tenía el segundo maíz?

54. La altura de un trapecio isósceles es de 3 cm, el perímetro, 28 cm, y los lados inclinados son iguales a la base menor. Calcula el área del trapecio.

55. Dos autobuses salen, uno desde Madrid y el otro desde Cáceres a las 9 de la mañana. Uno va a 80 km/h y el otro a 100 km/h. ¿A qué hora se cruzan? ¿A cuántos km de Madrid estarán?

56. En un concurso se ganan 40 euros por cada respuesta acertada y se pierden 80 por cada fallo. Después de 10 preguntas, Carmela lleva ganados 280 euros. ¿Cuántas preguntas ha acertado?

57. Paco ha comprado 5 zumos y 4 batidos por 5,7 €, luego ha comprado 7 zumos y 5 batidos y le han costado 5,9 €. Calcula los precios de ambas cosas.

58. ¿Qué fracción es igual a 1 cuando se suma 1 al numerador y es igual a 1/2 si se suma 2 al denominador?

59. El cociente de una división es 3 y el resto es 1. Si el divisor disminuye en 1 unidad, el cociente aumenta en 3 y el resto nuevo es 1. Hallar el dividendo y el divisor.

60. Dos amigas fueron a pescar. Al final del día una dijo: “Si tú me das uno de tus peces, entonces yo tendré el doble que tú”. La otra le respondió: “Si tú me das uno de tus peces, yo tendré el mismo número de peces que tú”. ¿Cuántos peces tenía cada una?

61. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su área es 35 cm^2 y cuyo perímetro, 24 cm.

62. Un peatón sale de una ciudad “A” a una velocidad de 4 km/h, y se dirige a una ciudad “B” que está a 20 km de la ciudad “A”, 30 minutos después sale un ciclista de la ciudad “B” a una velocidad de 20 km/h y se dirige hacia “A”, ¿cuánto tiempo lleva el peatón caminando en el momento del encuentro? ¿A qué distancia de “B” se cruzan?

63. Se desea mezclar aceite de 2,7 €/l con otro aceite de 3,6 €/l de modo que la mezcla resulte a 3 €/l. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 100 litros de la mezcla?

64. Al intercambiar las cifras de un número de dos cifras se obtiene otro que es 45 unidades mayor. Halla el número inicial.

65. La diagonal de un rectángulo mide 25 cm y el perímetro 70 cm. Halla los lados del rectángulo.

66. Una valla rodea un terreno rectangular de 300 m^2. Si la valla mide 70 metros, calcula las dimensiones del terreno.

67. Varios amigos van a hacer un regalo de bodas que cuesta 800 euros, que pagarán a partes iguales. A última hora se apuntan seis amigos más, con lo que cada uno toca a 30 euros menos. ¿Cuántos amigos eran inicialmente? ¿Cuánto pagará al final cada uno?

68. Las diagonales de un rombo se diferencian en 2 cm y su área es de 24 cm^2. Calcula su perímetro.

69. Un tren sale de Barcelona hacia Madrid a una velocidad de 200 km/h. Una hora más tarde sale otro tren de Madrid hacia Barcelona a 220 km/h; la distancia entre las dos ciudades es de 618 km. ¿Al cabo de cuánto tiempo se cruzan los dos trenes? ¿A qué distancia de Barcelona?

70. Un coche sale de una ciudad “A” a una velocidad de 100 km/h y 30 minutos más tarde otro coche sale de “A” en la misma dirección y sentido a una velocidad de 120 km/h, ¿cuánto tiempo tardará el segundo en alcanzar al primero y a qué distancia de “A” se produce el encuentro?

AUTOEVALUACIÓN

1. La solución de la ecuación $2(x-3)-3(x^2-4)=1$ es:

a) $x = 10/3 \wedge x = -2$ b) $x = 5/3 \wedge x = -1$ c) $x = 1 \wedge x = -2/3$ d) $x = 3/2 \wedge x = -7/6$

2. Las soluciones de la ecuación $80 = x(x-2)$ son:

a) $x = 8 \wedge x = -10$ b) $x = 40 \wedge x = 2$ c) $x = 10 \wedge x = -8$ d) $x = 10 \wedge x = 8$

3. Las soluciones de la ecuación $\frac{3x-1}{2}-\frac{x+5}{6}=\frac{x^2}{3}$ son:

a) $x = 4 \wedge x = -2$ b) $x = 3 \wedge x = -2$ c) $x = 1/5 \wedge x = 2$ d) $x = 2 \wedge x = 2$

4. Las soluciones de la ecuación $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ son:

a) 2, –2, 5, –5 b) 3, –3, 2, –2 c) 1, –1, 4, –4 d) 3, –3, 5, –5

5. Las rectas que forman el sistema $\begin{cases} 7x+21y=14 \\ 2x+6y=4 \end{cases}$ son:

a) Secantes b) Paralelas c) Coincidentes d) Se cruzan

6. La solución del sistema $\begin{cases} 3x-2y=-1 \\ -2x+3y=2 \end{cases}$ es:

a) $x = 2$ e $y = 1$ b) $x = 2$ e $y = 2$ c) $x = 3$ e $y = 2$ d) No tiene solución

7. La solución del sistema $\begin{cases} 3+2x=x-1+y \\ 2x-9y=-43 \end{cases}$ es:

a) $x = 1$ e $y = 5$ b) $x = -2$ e $y = -5$ c) $x = -43/2$ e $y = 0$ d) $x = 3$ e $y = 4$

8. La solución del sistema $\begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ -2x+3y+z=7 \\ 2x-3y+2z=2 \end{cases}$ es:

a) $x = 3, y = 2, z = 1$ b) $x = 2, y = 1, z = 3$ c) $x = -1, y = -2, z = -3$ d) $x = 1, y = 2, z = 3$

9. En una granja, entre gallinas y vacas hay 120 animales y 280 patas. ¿Cuántos gallinas y vacas hay en la granja?

a) 90 gallinas y 30 vacas b) 100 gallinas y 20 vacas c) 80 gallinas y 40 vacas

10. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 5, le faltan 234 unidades para llegar a su cuadrado?

a) 18 años b) 20 años c) 25 años d) 28 años

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF