MATEMÁTICAS: 3º de ESO
Capítulo 7:
Geometría del plano

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Luis Suberviola

Revisor: Alberto de la Torre

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF; Pedro Luis Suberviola y Milagros Latasa

Índice

Resumen

Tales, Pitágoras y muy posteriormente Euclides son matemáticos griegos a los que debemos el estudio de la Geometría deductiva. Anteriormente egipcios y babilonios utilizaron la Geometría para resolver problemas concretos, como volver a poner lindes a las tierras después de las inundaciones del Nilo. Pero en Grecia se utilizó el razonamiento lógico para deducir las propiedades. Euclides intentó recoger el conocimiento que existía y escribió *Los Elementos* que consta de 13 libros o capítulos, de los que los seis primeros tratan de Geometría Plana, y el último de Geometría en el espacio. En este libro define conceptos, tan difíciles de definir como punto o recta, y enuncia los cinco axiomas (de Euclides) de los que parte como verdades no demostrables, y a partir de ellos demuestra el resto de las propiedades o teoremas. Estos axiomas son:

Euclides

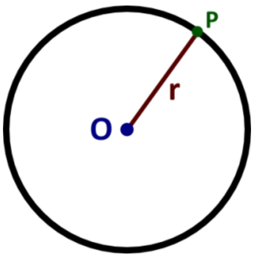
1. Dados dos puntos se pueden trazar una recta que los une.
2. Cualquier segmento puede ser prolongado de forma continua en una recta ilimitada.
3. Se puede trazar una circunferencia de centro en cualquier punto y radio cualquiera.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Dada una recta y un punto, se puede trazar una única recta paralela a la recta por dicho punto.

En este capítulo vamos a recordar cuestiones que ya conoces de Geometría en el plano, profundizando en algunas de ellas, como en los criterios de semejanza de los triángulos. De este modo vas a ser capaz de resolver un buen número de problemas.

Autor: Pedro Luis Superviola
Revisor: Alberto de la Torre
Ilustraciones: Banco de imágenes INTEF y Pedro Luis Superviola

1. LUGARES GEOMÉTRICOS

Muchas veces definimos una figura geométrica como los puntos del plano que cumplen una determinada condición. Decimos entonces que es un *lugar geométrico del plano*.



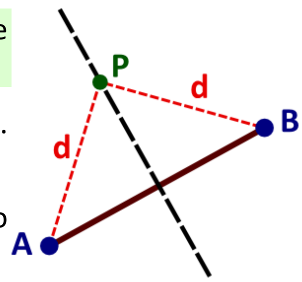
1.1. La circunferencia

La **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto del mismo (el centro) es un valor determinado (el radio).

Todos los puntos de la circunferencia tienen una distancia igual al radio (r) del centro (O).

1.2. Mediatriz de un segmento

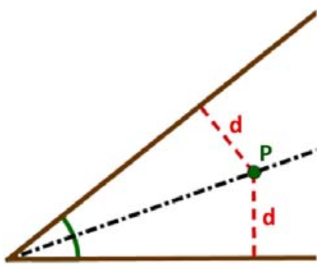
La **mediatriz** de un segmento es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del mismo.



Un punto P de la mediatriz verifica que está a la misma distancia de A que de B. Cualquier otro punto que lo cumpla pertenece a la mediatriz.

La mediatriz es una recta perpendicular al segmento y pasa por el punto medio del mismo.

1.3. Bisectriz de un ángulo



Dado un ángulo delimitado por dos rectas, la **bisectriz** del ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las mismas.

Un punto P de la bisectriz verifica que está a la misma distancia de las dos rectas que forman el ángulo. Cualquier otro punto que lo cumpla pertenece a la bisectriz.

La bisectriz pasa por el vértice del ángulo y divide a éste en dos ángulos iguales.

Actividades propuestas

1. Un agricultor encuentra en su campo una bomba de la Guerra Civil. Las autoridades establecen una distancia de seguridad de 50 metros. ¿Cómo se debe acordonar la zona?
2. Un juego de dos participantes consiste en que se sitúan a una distancia de dos metros entre sí y se ponen varias banderas a la misma distancia de ambos. La primera a 5 metros, la segunda a 10 metros, la tercera a 15 y así sucesivamente. ¿Sobre qué línea imaginaria estarían situadas las banderas?
3. Cuando en una acampada se sientan alrededor del fuego lo hacen formando un círculo. ¿Por qué?
4. Utiliza regla y compás para dibujar la bisectriz de un ángulo y la mediatriz de un segmento.

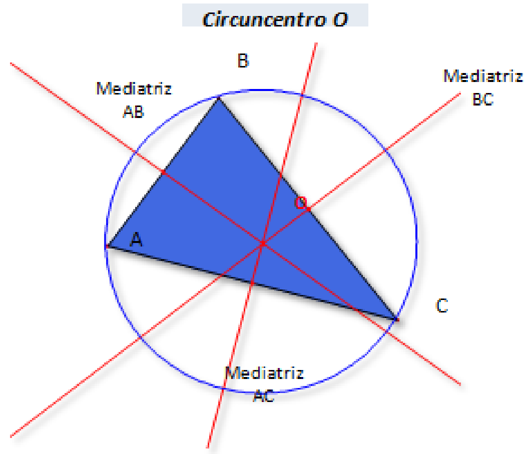
Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Ilustraciones: Banco de imágenes INTEF y Pedro Luis Suberviola

1.4. Rectas y puntos notables de un triángulo

Recuerda que:

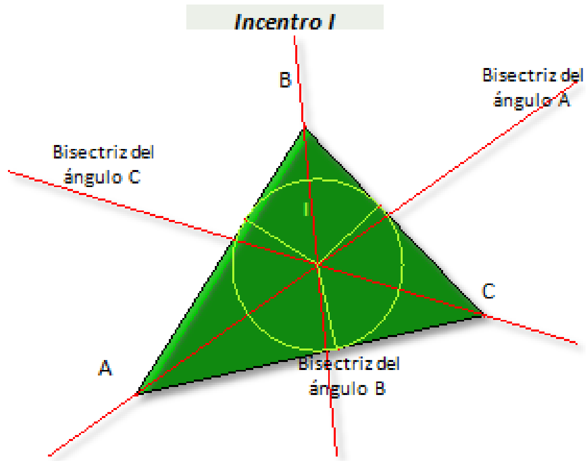
En cualquier triángulo podemos encontrar sus mediatrices, bisectrices, alturas y medianas.

Mediatrices. Circuncentro.



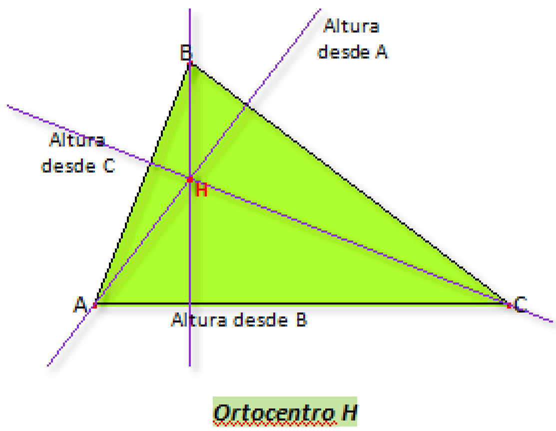
Las mediatrices se cortan en el circuncentro.
El circuncentro está a la misma distancia de los tres vértices. Es el centro de la circunferencia circunscrita.

Bisectrices. Incentro.



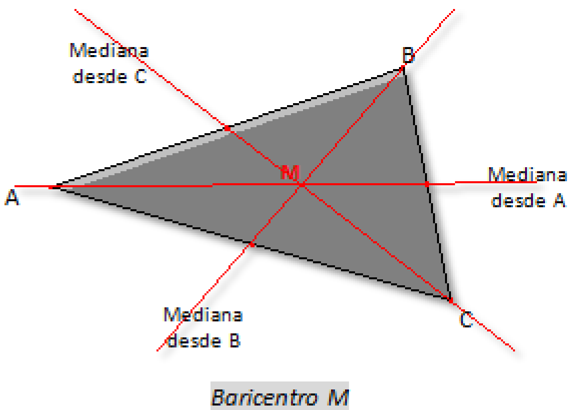
Las bisectrices se cortan en el Incentro.
El incentro está a la misma distancia de los tres lados. Es el centro de la circunferencia inscrita.

Alturas. Ortocentro.



Las alturas son las perpendiculares a un lado trazadas desde el vértice opuesto. Se cortan en el ortocentro.

Medianas. Baricentro.



Las medianas son las rectas que pasan por un vértice y por el punto medio del lado opuesto. Dividen al triángulo en dos triángulos de igual área.
Se cortan en el baricentro. La distancia del mismo a cada lado es el doble de su distancia al vértice opuesto correspondiente.

Si la **mediatriz** de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento, cada mediatriz de un triángulo equidistará de dos de los vértices del triángulo y es la

Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Ilustraciones: Banco de imágenes INTEF y Pedro Luis Suberviola

mediatriz de uno de sus lados. Las tres mediatrices se cortan en un punto, el **circuncentro**, que, por tanto, distará lo mismo de cada uno de los tres vértices del triángulo, y es el centro de una circunferencia circunscrita al triángulo, que pasa por sus tres vértices.

Si la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo, ahora cada una de las tres bisectrices de un triángulo equidistará de dos de los lados del triángulo. Las tres bisectrices se cortan en un punto, el **incentro**, que, por tanto, equidista de los tres lados del triángulo y es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

En cualquier triángulo el circuncentro, incentro, ortocentro y baricentro están sobre una misma línea recta, a la que se denomina *Recta de Euler*.

Actividades propuestas

6. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de lados 7, 6 y 4 cm. Traza en él las circunferencias inscritas y circunscritas.

7. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de lado 8 cm y ángulos adyacentes al mismo de 40º y 30º. Encuentra su ortocentro y su baricentro.

8. Dibuja en tu cuaderno un triángulo con un ángulo de 40º comprendido entre dos lados de 6 y 4 cm. Obtén su circuncentro y su incentro.

9. ¿Qué pasa con las rectas y los puntos notables en un triángulo equilátero?

10. Dibuja un triángulo isósceles con el ángulo desigual de 40º. Traza las rectas notables para el lado desigual y para uno de los lados iguales. ¿Qué pasa?

11. Una hormiga anda por una mediana de un triángulo partiendo del vértice. Cuando llega al baricentro ha recorrido 8 centímetros. ¿Qué distancia le falta para llegar al punto medio del lado opuesto al vértice de donde partió?

12. Queremos situar una farola en una plaza triangular. ¿Dónde la pondríamos?

13. Tenemos un campo triangular sin vallar y queremos atar una cabra de forma que no salga del campo pero que acceda al máximo de pasto posible. ¿Dónde pondríamos el poste?

14. A Yaiza y a su hermano Aitor les encanta la tarta. Su madre les ha hecho una triangular. Yaiza la tiene que cortar pero Aitor elegirá primero su pedazo. ¿Cómo debería cortar Yaiza la tarta?

15. El ortocentro de un triángulo rectángulo, ¿dónde está?

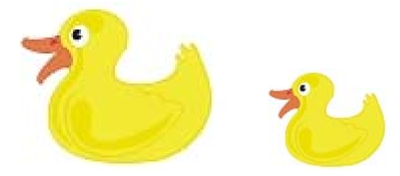
16. Comprueba que el circuncentro de un triángulo rectángulo está siempre en el punto medio de la hipotenusa.

17. El baricentro es el centro de gravedad. Construye un triángulo de cartulina y dibuja su baricentro. Si pones el triángulo horizontalmente en el aire sólo sujetado por la punta de un lápiz en el baricentro comprobarás que se sujeta.

18. Calcula el lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio. [*Ayuda*: Aplica que en este caso el circuncentro coincide con el baricentro y que éste último está al doble de distancia del vértice que del lado opuesto.]

2. SEMEJANZA

2.1. Figuras semejantes

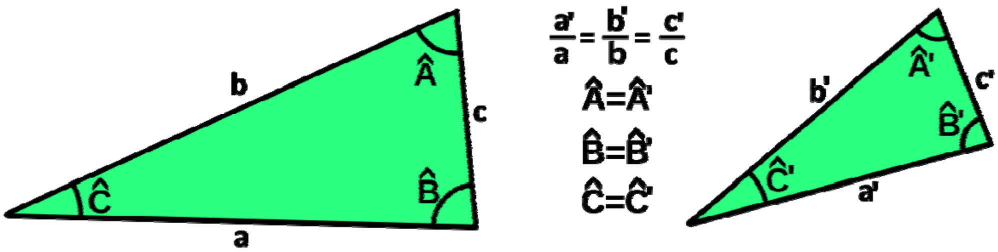


Dos figuras semejantes tienen *la misma forma*. Es muy útil saber reconocer la semejanza para poder estudiar una figura e inferir así propiedades de una figura semejante a ella que es más grande o inaccesible. La semejanza conserva los ángulos y mantiene la proporción entre las distancias.

Dos polígonos son semejantes si sus lados son proporcionales y sus ángulos son iguales.

2.2. Triángulos semejantes. Criterios de semejanza.

Dos triángulos son **semejantes** tienen todos los ángulos iguales y los lados proporcionales.



Para reconocer dos triángulos semejantes no es necesario conocer todos los lados y ángulos, es suficiente con que se cumpla alguno de los siguientes **criterios de semejanza.**

Dos triángulos son semejantes sí:

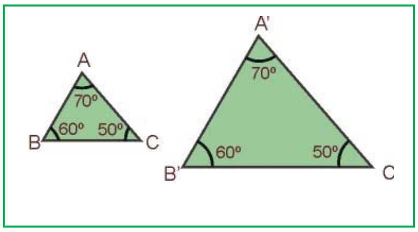
Primero: Tienen dos ángulos iguales.

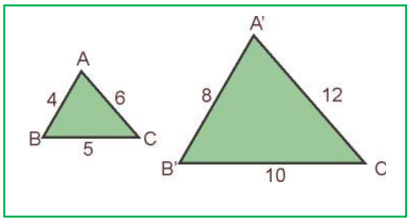
Segundo: Tienen los tres lados proporcionales.

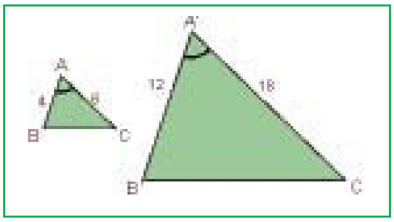
Tercero: Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual.

La demostración se basa en los criterios de igualdad de triángulos. Ya sabes que dos triángulos son iguales si tienen sus tres lados iguales y sus tres ángulos iguales, pero no es necesario que se verifiquen esas seis igualdades para que lo sean. Basta por ejemplo que tengan un lado y dos ángulos iguales. Así, se puede construir un triángulo igual a uno de los dados en posición *Tales* con el segundo y deducir la semejanza.

Ejemplo







Actividades propuestas

19. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 80º y otro de 40º. Un ángulo de 80º y otro de 60º.
b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 70º. Triángulo isósceles con ángulo igual de 50º.
c) *A* = 30º, *b* = 7 cm, *c* = 9 cm. *A'*= 30º, *b'* = 3.5 cm, *c'* = 4.5 cm
d) *a* = 4 cm, *b* = 5 cm, *c* = 7 cm. *a'* = 10 cm, *b'* = 12.5 cm, *c'* = 24.5 cm

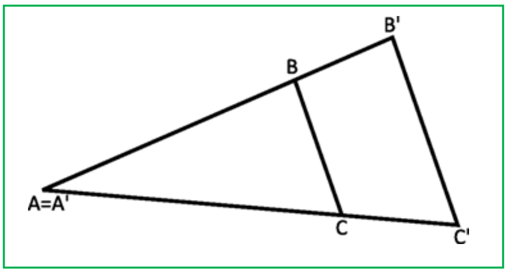
20. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

a) *a* = 9 cm, *b* = 6 cm, *c* = 12 cm. *a*' = 6 cm, *b'* = 4 cm, ¿*c'*?

b) *A* = 45º, *b* = 8 cm, c = 4 cm. *A'* = 45º, *b'* = 8 cm, ¿*a'*?

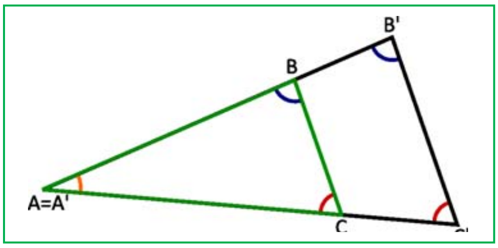
21. Un triángulo tiene lados de 6 cm, 7 cm y 7 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 60 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

2.3. Triángulos en posición de Tales



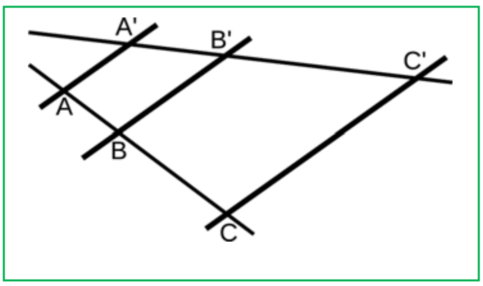
Decimos que dos triángulos están en posición de Tales cuando dos de los lados de cada uno están sobre las mismas rectas y los otros lados son paralelos.

Los ángulos son iguales. Uno porque es el mismo. Los otros por estar formados por rectas paralelas. Por lo tanto, por el primer criterio de semejanza de triángulos, los triángulos son proporcionales y se cumple:



$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$

2.4. Teorema de Tales

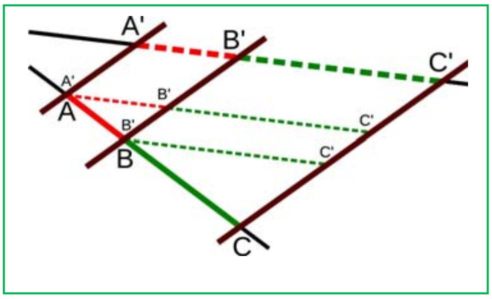


El teorema de Tales establece una relación entre los segmentos formados cuando dos rectas cualesquiera son cortadas por varias rectas paralelas.

En la segunda figura se puede apreciar cómo se forman en este caso tres triángulos semejantes y que por lo tanto se establece que:

Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Ilustraciones: Banco de imágenes INTEF y Pedro Luis Suberviola

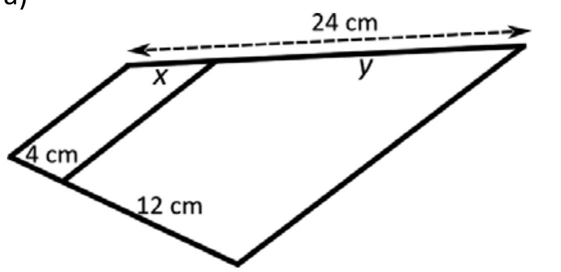
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$

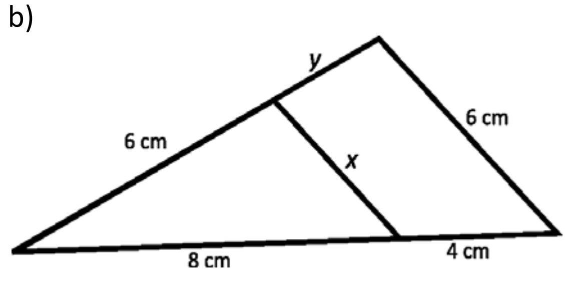


Observación: En este caso no relacionamos los segmentos *AA'*, *BB'* y *CC'* que se forman sobre los lados paralelos.

Actividades propuestas

22. Calcula los valores de *x* e *y* en las siguientes figuras.

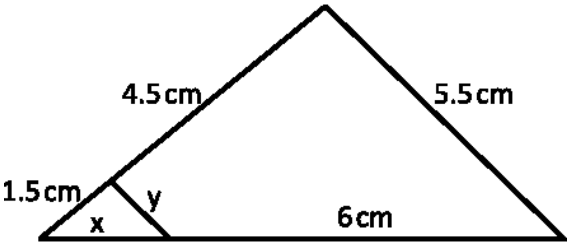


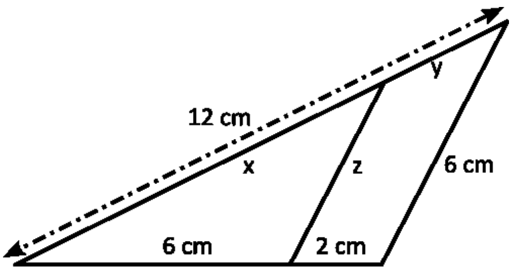


23. Un poste muy alto se sujeta con cables de acero que van de su extremo superior al suelo. La distancia del anclaje de uno de los cables a la base del poste es 6 metros. Ponemos una barra de 120 centímetros de forma que está perpendicular al suelo y justo toca el suelo y el cable. Su distancia al anclaje del cable es 90 centímetros. Calcula la longitud del poste y la longitud del cable de acero.

24. María mide 160 cm. Su sombra mide 90 cm. En ese mismo instante se mide la sombra de un edificio y mide 7,2 m. ¿Cuánto mide el edificio?

25. Calcula las longitudes que se indican:



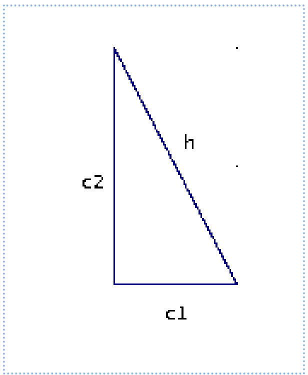


Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Ilustraciones: Banco de imágenes INTEF y Pedro Luis Suberviola

3. ÁNGULOS, LONGITUDES Y ÁREAS

3.1. Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras



En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

Utilizando el teorema de Pitágoras podemos obtener el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo si conocemos lo que miden los catetos: $h = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, o también podemos obtener el valor de un cateto a partir de los valores de la hipotenusa y del otro cateto: $c_2 = \sqrt{h^2 - c_1^2}$

Ejemplo:

- Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 10 *cm* y 24 *cm*, su hipotenusa vale 26 *cm*, ya que:

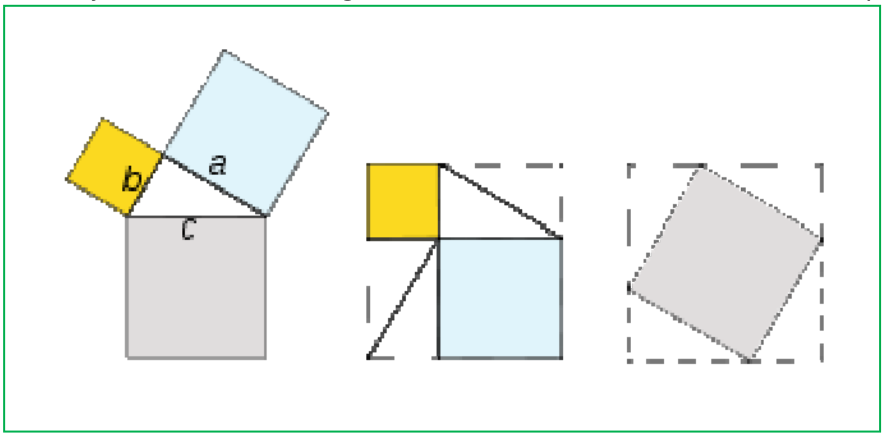
$$h = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{100 + 576} = \sqrt{676} = 26 \quad cm.$$

Interpretación del teorema de Pitágoras

Si dibujamos un cuadrado de lado la hipotenusa *h* de un triángulo rectángulo, su área es h^2 (ver el primer ejemplo de 1.1). Si dibujamos dos cuadrados de lados los catetos c_1 y c_2 de ese triángulo rectángulo, sus áreas son c_1^2, c_2^2. Entonces el teorema de Pitágoras dice que el área del primer cuadrado (cuadrado gris de la figura de la izquierda) es igual a la suma de las áreas de los otros dos (cuadrados azul claro y amarillo de la figura de la izquierda).

Existen más de 367 demostraciones diferentes del Teorema de Pitágoras.

Una comprobación gráfica consiste en dibujar dos cuadrados iguales de lado la suma de los catetos *a* y *b* (figuras del centro y de la derecha). En uno se dibujan los cuadrados de lado *a* y *b*, en amarillo y azul en el dibujo. En el otro el cuadrado de lado la hipotenusa (en gris en el dibujo). Observa que quitando 4 triángulos iguales al de partida nos queda que el cuadrado gris es igual a la suma de los cuadrados amarillo y azul.



Por tanto:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Ilustraciones: Banco de imágenes INTEF y Pedro Luis Suberviola

Actividades propuestas

26. ¿Es posible encontrar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 5 y 12 *cm* y su hipotenusa 24 *cm*? Si tu respuesta es negativa, halla la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 y 12 *cm*. Utiliza calculadora para resolver esta actividad si te resulta necesaria.

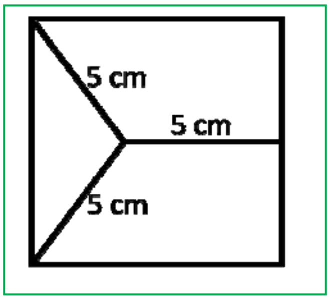
27. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:

a) 6 *cm* y 8 *cm* b) 4 *m* y 3 *m* c) 8 *dm* y 15 dm d) 13,6 *km* y 21,4 *km*.

28. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:

a) 26 *cm* y 10 *cm* b) 17 *m* y 8 *m* c) 37 *dm* y 35 *dm* d) 14,7 *km* y 5,9 *km*

29. Calcula el lado del cuadrado de la figura del margen:



30. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 9 *m*.

31. Calcula el área de un hexágono regular de lado 2 *cm*.

32. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 7 *dm*.

33. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 3 *m*.

34. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 15 *cm* y altura 8 *cm*.

35. Una portería de fútbol mide 7,32 m de alto por 2,44 m de ancho. El punto de penalti está a 10 metros. Calcula la distancia que recorre el balón en:

a) Un tiro directo a la base del poste.

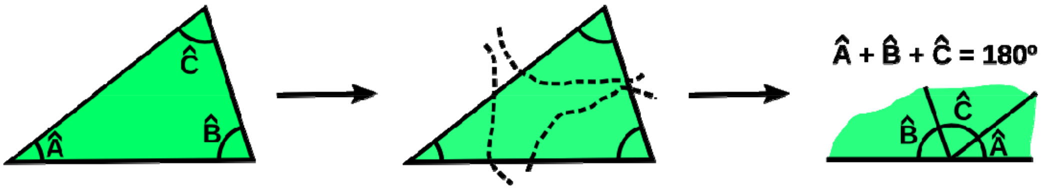
b) Un tiro directo a la escuadra.

36. Demuestra que el diámetro de un cuadrado de lado *x* es $d = \sqrt{2}x$.

37. Demuestra que la altura de un triángulo equilátero de lado *x* es $d = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

3.2. Suma de ángulos de un polígono

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º · *n*.

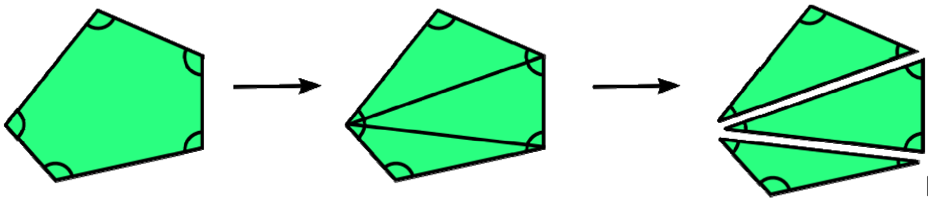


La suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados es $(n - 2)$·180º.

Para comprobarlo basta con trazar las diagonales de un polígono desde un vértice y lo habremos

Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Ilustraciones: Banco de imágenes INTEF y Pedro Luis Suberviola

dividido en triángulos.

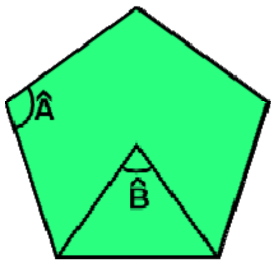


Por lo tanto:

Polígono	**Suma de ángulos**	**Polígono**	**Suma de ángulos**
Triángulo	180º	Cuadrilátero	180º · 2 = 360º
Pentágono	180º · 3 = 540º	Hexágono	180º · 4 = 720º

Si el polígono de *n* lados es regular, todos los ángulos interiores son iguales y para calcular el valor de su ángulo interior se divide entre *n* la suma de los ángulos interiores.

Ejemplo:



- *En un pentágono la suma de los ángulos centrales es* 180 · 3 = 540º.

Por lo tanto el **ángulo interior:** $\hat{B} = \dfrac{540^o}{5} = 108^o$

También es muy común calcular el **ángulo central**: $\hat{B} = \dfrac{360^o}{5} = 72^o$

Actividades propuestas

38. Calcula los ángulos central e interior del triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular, hexágono regular y eneágono regular.

39. Justifica que un hexágono regular se puede descomponer en 6 triángulos equiláteros.

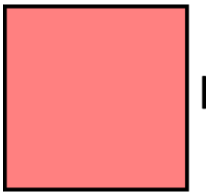
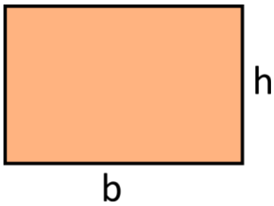
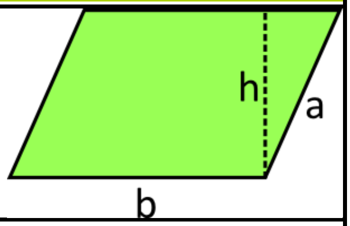
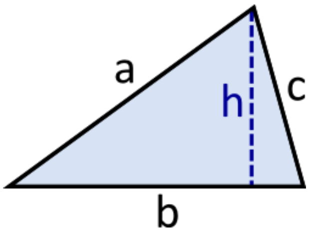
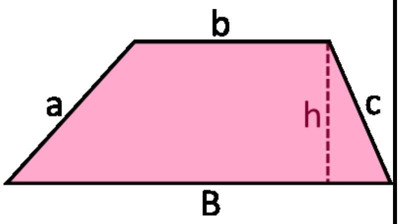
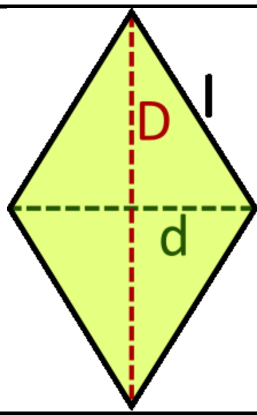
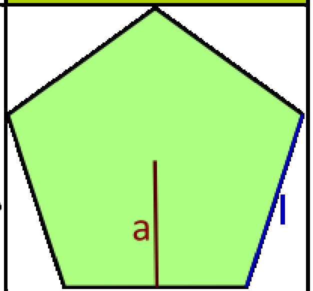
40. Dos ángulos de un triángulo isósceles miden 35º y 72º, ¿cuánto puede medir el ángulo que falta?

41. Dos ángulos de un trapecio isósceles miden 35º y 72º, ¿cuánto miden los ángulos que faltan?

42. ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un decágono irregular?

3.3. Longitudes y áreas de figuras poligonales

Recuerda que:

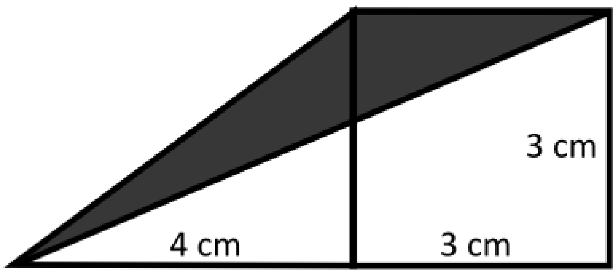
Cuadrado	Rectángulo	Romboide	
			
Perímetro: P = $4l$ **Área: A** = l^2	**P** = $2b + 2h$ **A** = $b \cdot h$	**P** = $2b + 2a$ **A** = $b \cdot h$	
Triángulo	**Trapecio**	**Rombo**	**Polígono regular de *n* lados**
			
P = $a + b + c$ A = $\frac{b \cdot h}{2}$	**P** = $a + B + b + c$ A = $\frac{B+b}{2} \cdot h$	A = $\frac{d \cdot D}{2}$	**P** = $n \cdot l$ A = $\frac{P \cdot a}{2}$

Actividades propuestas

43. Calcula el área y el perímetro de un trapecio isósceles de bases 50 cm y 26 cm y altura 5 cm.

44. Calcula el área y perímetro de un trapecio rectángulo de bases 100 cm y 64 cm, y de altura 77 cm.

45. Calcula el área y el perímetro de un trapecio isósceles de bases 80 cm y 60 cm y lados laterales 29 cm.



46. Utiliza el teorema de Tales para determinar el área y el perímetro de la zona sombreada de la figura.

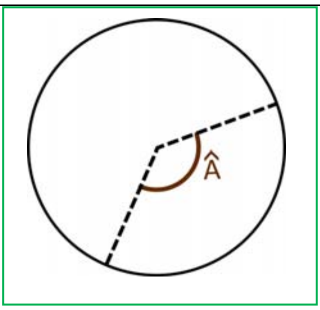
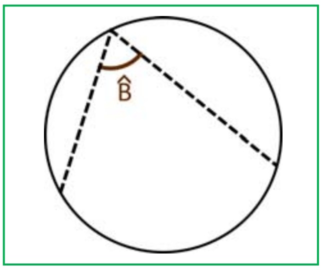
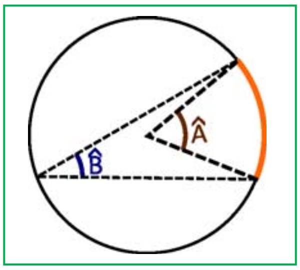
47. Teniendo en cuenta que un hexágono regular se puede dividir en seis triángulos equiláteros (cuya altura es el apotema del hexágono regular), calcula el área de un hexágono regular de 5 cm de lado.

48. Queremos cubrir el plano con polígonos regulares de 100 cm^2. Las únicas opciones posibles son el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono. Calcula cuál de estas tres figuras tiene menor perímetro. ¿Qué animal aplica este resultado? [Utiliza la relación entre lado y altura de un triángulo equilátero obtenida anteriormente]

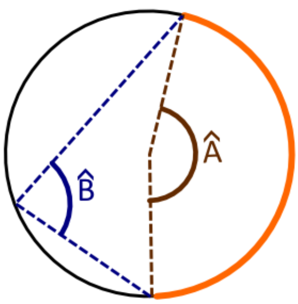
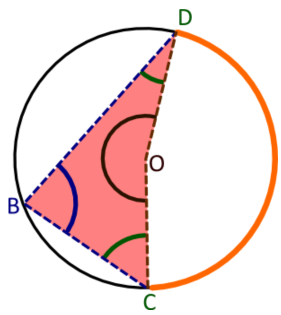
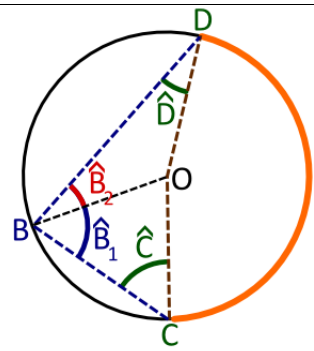
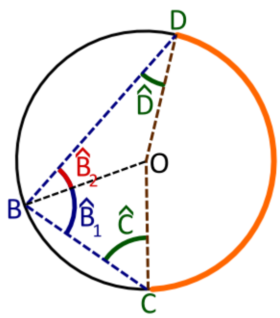
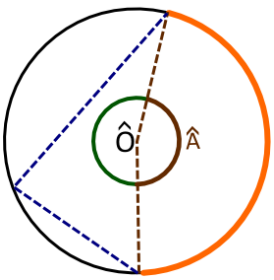
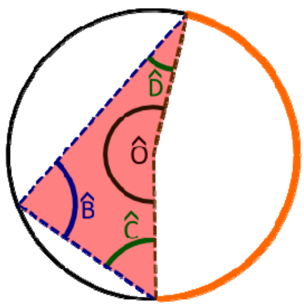
Autor: Pedro Luis Subervìola
Revisor: Alberto de la Torre
Ilustraciones: Banco de imágenes INTEF y Pedro Luis Subervìola

3.4. Ángulos de la circunferencia

En una circunferencia tienen especial importancia los **ángulos centrales** (tienen su vértice en el centro de la circunferencia) y los **ángulos inscritos** (tienen su vértice en un punto de la circunferencia).

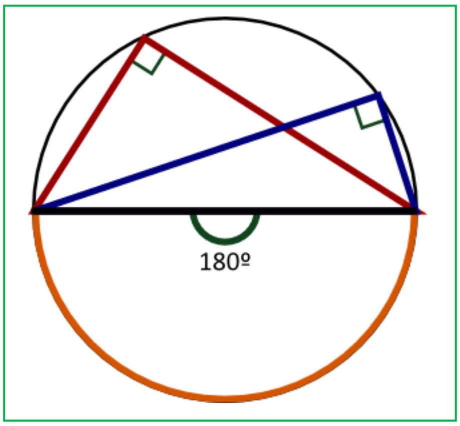
		
Ángulo central	**Ángulo inscrito**	$\hat{B} = \frac{\hat{A}}{2}$

Se verifica además que un ángulo inscrito mide la mitad que un ángulo central que abarca el mismo arco de circunferencia.

Demostración de la propiedad		
		
Debemos comprobar que el ángulo $\hat{B}$ es la mitad de $\hat{A}$. $2\hat{B}=\hat{A}$	Vamos a estudiar el cuadrilátero *BCOD* y aplicar en el último paso que sus ángulos suman 360º.	*BO* y *OD* son radios de la circunferencia. Por lo tanto *BDO* es isósceles y $\hat{B}_2$ y $\hat{D}$ son iguales.
		
Lo mismo para $\hat{B}_1$ y $\hat{C}$ Entonces $\hat{C}+\hat{D}$ = $\hat{B}_2+\hat{B}_2$ = $\hat{B}$	Además el ángulo Ô del cuadrilátero mide 360º – $\hat{A}$.	$\hat{B}+(\hat{C}+\hat{D})+\hat{O}$ =360º. $\hat{B}+(\hat{B})+360º-\hat{A}$=360º. $2\hat{B}=\hat{A}$

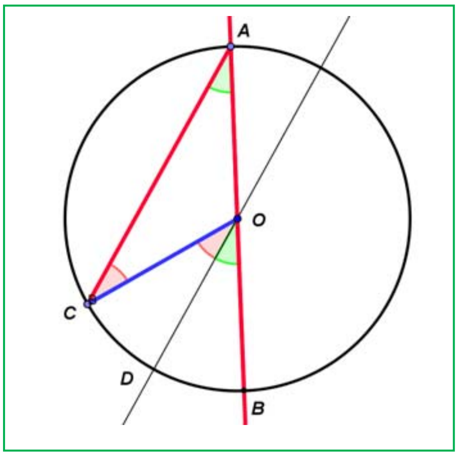
Autor: Pedro Luis Superviola
Revisor: Alberto de la Torre
Ilustraciones: Banco de imágenes INTEF y Pedro Luis Superviola

Tales observó que en cualquier triángulo rectángulo el circuncentro siempre estaba en el punto medio de la hipotenusa.



49. Un ángulo inscrito en la circunferencia que abarca un diámetro es un ángulo recto. ¿Por qué? Razona la respuesta.

50. ¿En qué posiciones tiene un futbolista el mismo ángulo de tiro que desde el punto de penalti?



51. Otra demostración. Intenta comprenderla. Trazamos un ángulo inscrito en la circunferencia *CAB* que tenga un lado que pase por el centro *O* de la circunferencia. Trazamos su central *COB*. El triángulo *OAC* es isósceles pues dos de sus lados son radios de la circunferencia. Trazamos por *O* una recta paralela a *AC*. El ángulo *CAO* es igual al ángulo *DOB* pues tienen sus lados paralelos. El ángulo *ACO* es igual al ángulo *COD* por alternos internos entre paralelas, y es igual al ángulo *CAO* por ser el triángulo isósceles. Por tanto el central mide el doble que el ángulo inscrito.

3.5. Longitudes y áreas de figuras circulares

Ya sabes que:

El **número π** se define como el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

π = Longitud de la circunferencia / Diámetro

Ya sabes que es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas. Una aproximación de **π** es 3,14, otra 3,1416, y otra 3,141592. Desde la antigüedad más lejana hasta hoy en día los matemáticos siguen investigando sobre él.

Si una circunferencia tiene un radio r, entonces su diámetro mide $2r$, y su longitud, por la definición de π, mide $2\cdot\pi\cdot r$.

Longitud de la circunferencia = $2\cdot\pi\cdot r$.

Para calcular la l**ongitud de un arco de circunferencia** que abarca un ángulo de α grados, debemos tener en cuenta que la circunferencia completa abarca un ángulo de 360 º. Por tanto:

$$L = 2\cdot\pi\cdot r\cdot\alpha/360.$$

El **área del círculo** es igual al producto del número π por el cuadrado del radio.

$$A = \pi\cdot r^2.$$

El **área de una corona circular** es igual al área del círculo mayor menos el área del círculo menor.

$$A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi\cdot(R^2 - r^2)$$

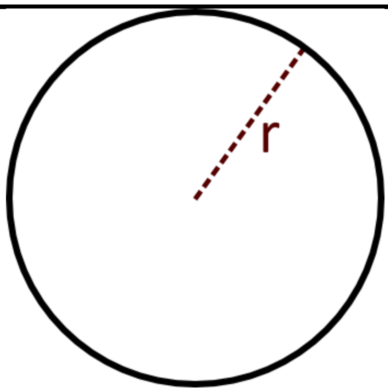
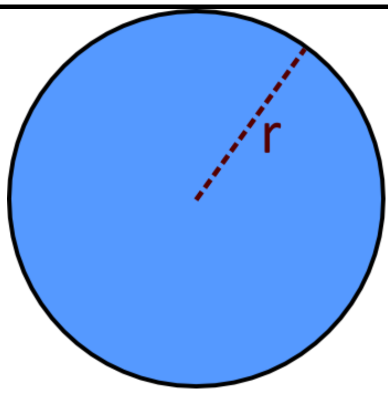
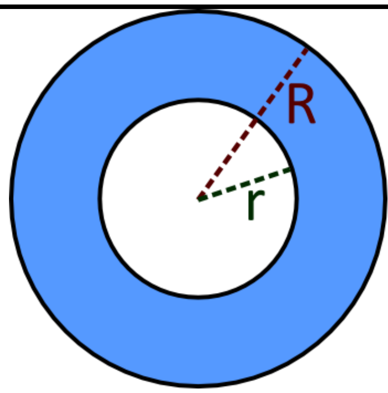
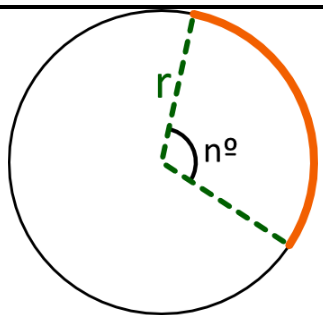
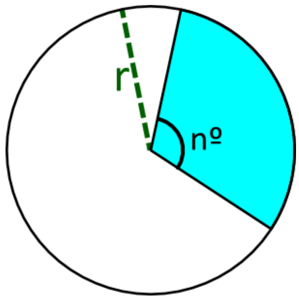
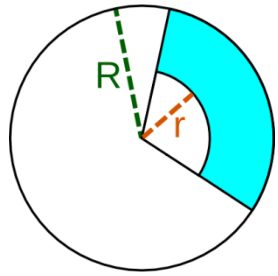
El **área de un sector circular** que abarca un ángulo de n grados es igual a:

$$A = \pi\cdot r^2\cdot n/360.$$

Autor: Pedro Luis Superviola
Revisor: Alberto de la Torre
Ilustraciones: Banco de imágenes INTEF y Pedro Luis Superviola

Para hallar el **área del segmento circular** restamos al área del sector circular el área del triángulo.

En resumen

Longitud de la circunferencia	Área del círculo	Área de la corona circular
		
$\mathbf{L} = 2 \cdot \pi \cdot r$	$\mathbf{A} = \pi \cdot r^2$	$\mathbf{A} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$
π es la razón entre el la longitud de una circunferencia y su diámetro. Es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas. Una aproximación de π es 3,14, otra 3,1416 y otra 3,141592		
Longitud del arco de circunferencia	**Área del sector circular**	**Área del trapecio circular**
		
$L = \frac{nº \cdot 2 \cdot \pi \cdot r}{360º}$	$A = \frac{nº \cdot \pi \cdot r^2}{360º}$	$A = \frac{nº \cdot \pi \cdot (R^2 - r^2)}{360º}$

Actividades resueltas

- La circunferencia de radio 5 *cm* tiene una longitud L = 2·π·*r* = 2·π·5 = 10·π ≈ 31,416.
- Las ruedas de un carro miden 60 *cm* de diámetro, y tienen 16 radios. La longitud del arco entre cada radio es:

  L = 2·π·*r*·α/360 = 60·π/16 ≈ 11,78 *cm*.

- El área de un círculo de radio 8 *cm* es A = 64 π ≈ 201,06 cm^2. Y el de un círculo de 10 *cm* de radio es A = π ≈ 314,16 cm^2.
- El área de un círculo de diámetro 10 m es A = 25π ≈ 78,54 m^2.

Autor: Pedro Luis Superviola
Revisor: Alberto de la Torre
Ilustraciones: Banco de imágenes INTEF y Pedro Luis Superviola

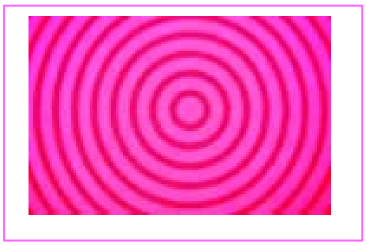
- El área de la corona circular formada por las circunferencias concéntricas de radios 9 *cm* y 5 *cm* es igual a: $A = \pi\cdot(R^2 - r^2) = \pi\cdot(9^2 - 5^2) = \pi\cdot(81 - 25) = \pi\cdot 56 \approx 175{,}93\ cm^2$.
- Para hallar el área del *sector* circular de radio 10 m que abarca un ángulo de 90º, calculamos el área del círculo completo: $\pi\cdot 10^2 = 100\,\pi$, y hallamos la proporción:

$$A_S = 100\pi\cdot 90/360 = 25\pi \approx 78{,}54\ m^2.$$

- Para hallar el área del *segmento* circular, restamos al área anterior el área del triángulo rectángulo de base 10 *m* y altura 10 *m*, $A_T = 10\cdot 10/2 = 50\ m^2$. Luego el área del segmento es:

$$A = A_S - A_T = 78{,}54 - 50 = 28{,}54\ m^2.$$

Actividades propuestas



52. Las circunferencias de tamaño real de la ilustración del margen tienen como radio, la menor 1 *cm*, la siguiente, un poco más oscura 2 *cm*, la clara siguiente 3 *cm*, y así, aumenta un centímetro. Calcula las longitudes de las 10 primeras circunferencias.

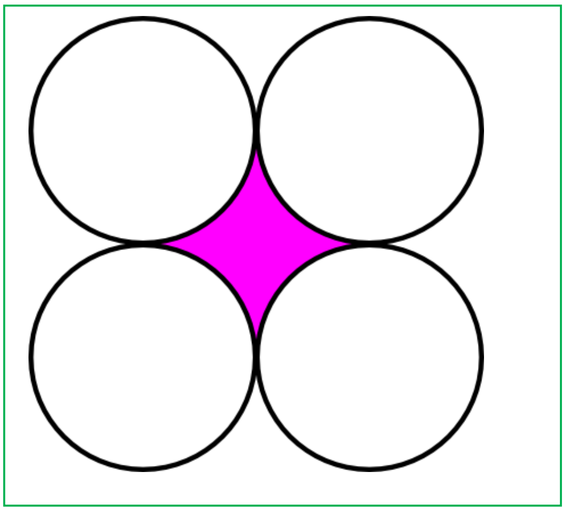
53. La Tierra es aproximadamente una esfera de radio 6.379 *km*. ¿Cuánto mide el Ecuador?

54. Antiguamente se definía un metro como: *"la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París"*. Según esta definición, ¿cuánto mide (en metros) el diámetro terrestre?

55. Un faro gira describiendo un arco de 170º. A una distancia de 5 *km*, ¿cuál es la longitud del arco de circunferencia en el que se ve la luz?

56. Determina el lado del triángulo equilátero de la figura construido usando arcos de circunferencia de 10 cm de radio.

57. Calcula el área encerrada por una circunferencia de radio 9 cm.

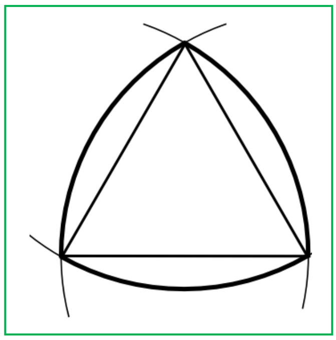


58. Calcula el área de la corona circular de radios 12 y 5 *cm*.

59. Calcula el área del sector circular y del segmento circular de radio 6 *cm* y que forma un ángulo de 60º.

60. Calcula el área del sector de corona circular de radios 25 *cm* y 18 *cm* y que forma un ángulo de 60º.

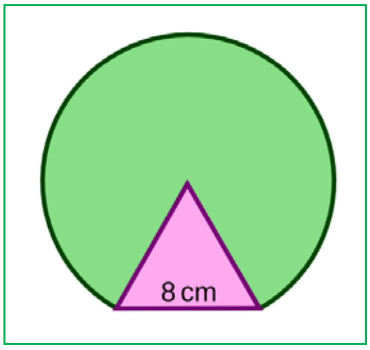
61. Calcula el área encerrada entre estos círculos de 5 cm de radio.



62. Queremos construir una rotonda para una carretera de 9 metros de ancho de forma que el círculo interior de la rotonda tenga el mismo área que la corona circular que forma la carretera. ¿Qué radio debe tener la rotonda?

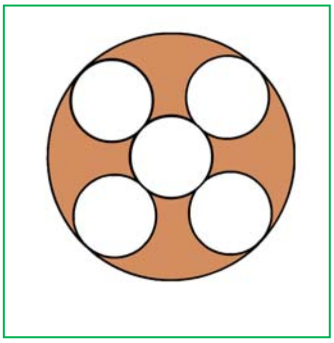
63. Una figura típica de la arquitectura gótica se dibuja a partir de un triángulo equilátero trazando arcos de circunferencia con centro en cada uno de sus vértices y que pasan por los dos vértices restantes. Calcula el área de una de estas figuras si se construye a partir de un triángulo

Autor: Pedro Luis Superviola
Revisor: Alberto de la Torre
Ilustraciones: Banco de imágenes INTEF y Pedro Luis Superviola

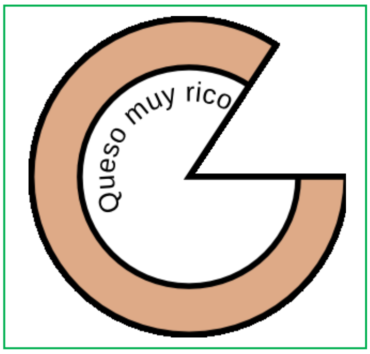


equilátero de 2 metros de lado. Calcula el área encerrada entre estos círculos de 5 cm de radio.

64. Calcula el área y el perímetro de la figura formada por un triángulo equilátero de 8 cm de lado sobre el que se construye un sector circular.

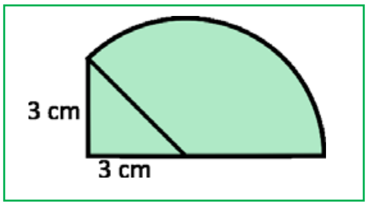


65. Hay 5 circunferencias inscritas en una circunferencia de 12 cm de radio tal como indica la figura. ¿Cuánto vale el área sombreada?

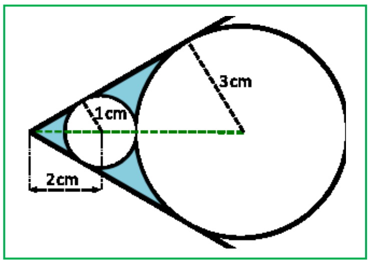


66. Un queso cilíndrico tiene una base circular de 14 cm de diámetro y una etiqueta circular de 8 cm de diámetro. Se corta una cuña de 70º. ¿Qué área tiene el trozo de etiqueta cortada?

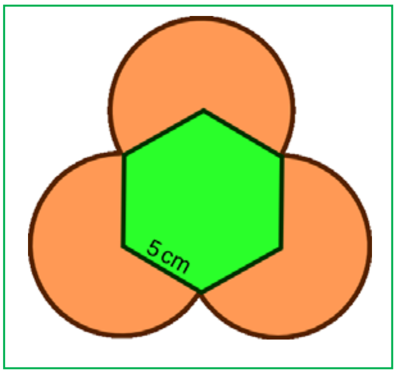
67. De un queso de 18 cm de diámetro cortamos una cuña de 50º. La etiqueta tiene 7 cm de radio. ¿Qué área del queso está visible?



68. A partir de un triángulo rectángulo isósceles de 3 cm de cateto construimos un sector circular. Calcula el área de la figura.



69. En dos rectas que forman 60º se inscriben dos circunferencias tangentes entre sí. La primera tiene el centro a 2 centímetros del vértice y el radio de 1 centímetro. La segunda tiene de radio 3 centímetros. ¿Cuánto vale el área sombreada?



70. Trazamos tres arcos circulares desde tres vértices de un hexágono de 5 cm de lado. Calcula el área y el perímetro de la figura.

Todo lo que hemos visto en este capítulo, excepto el enunciado del teorema de Tales y la semejanza de triángulos ya lo conocías. Lo estudiaste en primero de ESO. Allí se vio con detenimiento. Si no lo recuerdas y necesitas más explicaciones o problemas puedes verlo en el capítulo 8: Figuras Planas, de Primero de ESO, página 184, y en el capítulo 9: Longitudes y áreas, de primero de ESO, página 216.

CURIOSIDADES. REVISTA

Algo de historia de la Geometría

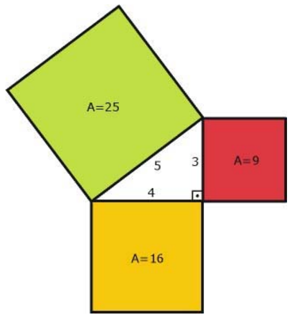
Se conjetura que el inicio de la Geometría puede ser anterior a **egipcios y babilonios**, pero como no existe información escrita, es imposible afirmarlo.

Herodoto opinaba que se había originado en Egipto por la necesidad de rehacer los lindes de las tierras después de las inundaciones del Nilo.

En el *papiro de Moscú* aparece el volumen de una pirámide cuadrada

En Mesopotamia se conocía mucha Geometría. En la tablilla Plimpton, que no se conserva entera, se pueden identificar con dificultad *ternas pitagóricas* (muy anteriores a *Pitágoras*).

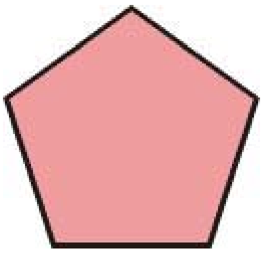
La **terna pitagórica** más conocida es 3, 4 y 5. Se hacían nudos a esas distancias y así se construían triángulos rectángulos.



En otras tablillas babilónicas, las de Susa, aparecen las áreas de los polígonos y las relaciones entre ellas.

Aunque podemos conocer muy poco de **Tales** y de **Pitágoras**, pues no ha quedado ninguna obra escrita por ellos, se acepta que fueron grandes matemáticos y geómetras.

Ambos viajaron a los centros del saber, Egipto y Babilonia. Ya hemos visto que ya se conocía lo llamamos teorema de Teles o de Pitágoras. Su importancia está en la forma de pensar, en utilizar el razonamiento deductivo para obtener los resultados matemáticos.



El pentágono, y la estrella pitagórica, que obtienes trazando las diagonales del pentágono, tienen grandes propiedades relacionadas con el número de oro, ¿lo recuerdas? La escuela tomó a la estrella como emblema.

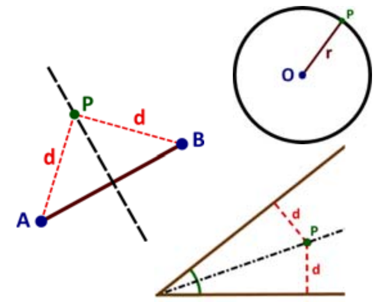
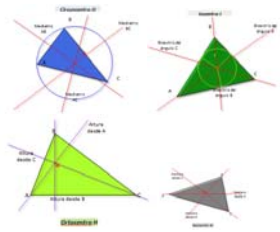
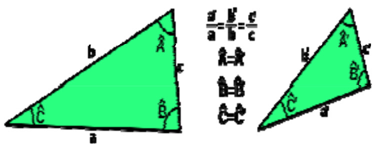
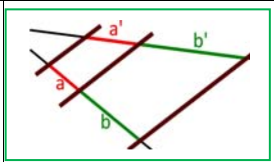
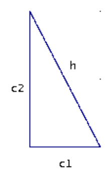
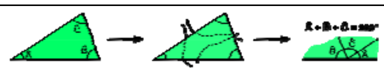
Teano, la mujer de Pitágoras, dirigió la Escuela Pitagórica a la muerte de éste.

Euclides de Alejandría es el autor de los *Elementos*, donde destaca la forma de exponer el fundamento de la Matemática con un orden lógico

Consta de 13 libros siendo los seis primeros de Geometría plana, y el último sobre cuerpos. Con definiciones y postulados construye el saber.

Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Ilustraciones: Banco de imágenes INTEF y Pedro Luis Suberviola

RESUMEN

		Ejemplos
Lugares geométricos	**Circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del centro. **Mediatriz de un segmento** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del mismo. Dado un ángulo delimitado por dos rectas, la **bisectriz** del ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las mismas.	
Rectas y puntos notables de un triángulo	Mediatrices y circuncentro Bisectrices e incentro Alturas y ortocentro Medianas y baricentro	
Semejanza	Dos figuras semejantes tienen *la misma forma*. Dos polígonos son semejantes si sus lados son proporcionales y sus ángulos son iguales.	
Criterios de semejanza de triángulos	Dos triángulos son semejantes si: 1) Tienen 2 ángulos iguales. 2) Tienen los 3 lados proporcionales. 3) Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual	
Teorema de Tales	Establece una relación entre los segmentos formados cuando dos rectas cualesquiera son cortadas por varias rectas paralelas: $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{a'+b'}{a+b}$	
Teorema de Pitágoras	En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos: $$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$ $$h=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5\ \ cm.$$	
Suma de los ángulos de un polígono	La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180·*n*.	

Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Ilustraciones: Banco de imágenes INTEF y Pedro Luis Suberviola

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Lugares geométricos

1. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de lados 2 cm, 3 cm y 4 cm. Traza en él, utilizando regla y compás, las mediatrices y bisectrices. Determina el circuncentro y el incentro. Traza las circunferencias inscritas y circunscritas.

2. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de lado 5 cm y ángulos adyacentes al mismo de 30º y 50º. Traza en él, utilizando regla y compás, las medianas y las alturas. Determina su ortocentro y su baricentro.

3. Dibuja en tu cuaderno un triángulo con un ángulo de 50º comprendido entre dos lados de 5 y 8 cm. Obtén su circuncentro y su incentro.

4. ¿Cómo son las rectas y puntos notables de un triángulo rectángulo?

5. ¿Cómo son las rectas y puntos notables de un triángulo isósceles?

Semejanza

6. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 70º y otro de 20º. Un ángulo de 90º y otro de 20º.

b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80º. Triángulo isósceles con un ángulo igual de 50º.

c) A = 40º, b = 8 cm, c = 10 cm. A'= 40º, b' = 4 cm, c' = 5 cm

d) a = 3 cm, b = 4 cm, c = 6 cm. a' = 9 cm, b' = 12 cm, c' = 19 cm

7. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

a) a = 15 cm, b = 9 cm, c = 12 cm. a' = 10 cm, b' = 4 cm, ¿c'?

b) A = 50º, b = 6 cm, c = 4 cm. A' = 50º, b' = 18 cm, ¿a'?

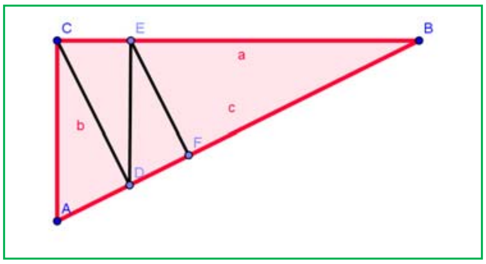
8. Las longitudes de los lados de un triángulo son 12 cm, 14 cm y 14 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 90 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

9. Dibuja en tu cuaderno un pentágono regular. Traza sus diagonales. El triángulo formado por un lado del pentágono y las dos diagonales del vértice opuesto se denomina triángulo áureo, pues al dividir el lado mayo entre el menor se obtiene el número de oro, ¿cuánto miden sus ángulos? Busca en la figura que has trazado otros triángulos áureos. ¿Cuál es la relación de proporcionalidad?

10. ¿Cuánto es la suma de los ángulos interiores de un rombo?

11. La sombra de un edificio mide 15 m, y la del primer piso 2 m. Sabemos que la altura de ese primer piso es de 3 m, ¿cuánto mide el edificio?

12. En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que aparece dibujado un triángulo rectángulo *ABC*, de lados a = 60, b = 45 y c= 75, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores *ACD*, *CDE*, *DEF* y *EFB*, y el escriba calcula la longitud del lado *AD* como 27. ¿Ha utilizado la semejanza de triángulos? ¿Cómo se podría calcular? ¿Qué datos necesitas? Calcula el área del triángulo *ABC* y del triángulo *ACD*. Determina la longitud de los segmentos *CD*, *DE* y *EF*.



13. Demuestra que en dos triángulos semejantes las medianas son proporcionales.

14. Un triángulo rectángulo isósceles tiene un cateto de longitud 7 cm, igual a la hipotenusa de otro

Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Ilustraciones: Banco de imágenes INTEF y Pedro Luis Suberviola

triángulo semejante al primero. ¿Cuánto valen las áreas de ambos triángulos?

15. El mapa a escala 1:3000000 de un pueblo tiene un área de 2500 cm^2, ¿cuánto mide la superficie verdadera de dicho pueblo?

16. Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo se obtiene otro triángulo. ¿Cómo son? ¿Qué relación hay entre sus perímetros? ¿Y entre sus áreas?

17. La altura y la base de un triángulo rectángulo miden respectivamente 4 y 7 cm; y es semejante a otro de base 26 cm. Calcula la altura del nuevo triángulo y las áreas de ambos.

Ángulos, longitudes y áreas

18. Construye un triángulo conociendo la altura sobre el lado a, el lado a y el c.

19. Calcula la longitud del lado de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio 5 cm.

20. Calcula la apotema de un hexágono regular lado 7 cm.

21. Calcula el área de un círculo cuya circunferencia mide 50 cm.

22. Calcula la longitud de una circunferencia cuya círculo tiene una superficie de mide 50 cm^2.

23. La Tierra da una vuelta cada 24 horas, ¿a qué velocidad se mueve un punto del Ecuador?

24. ¿Qué relación hay entre las áreas un triángulo inscrito en un círculo y la del círculo?

25. Los griegos conocían las dos siguientes posibles formas de construir un triángulo rectángulo con sus tres lados de longitud un número natural, sin más que dar valores a n. Comprueba si se verifican para n = 1, 2, …. a) Catetos: $2n$ y $n^2 - 1$, hipotenusa: $n^2 + 1$. b) Catetos: $2n + 1$ y $2n^2 + 2n$, hipotenusa: $2n^2 + 2n + 1$.

26. Al aumentar en 3 cm el lado de un cuadrado su área aumenta 32 cm^2 ¿Cuánto mide el lado de dichos cuadrados?

27. Se quiere cubrir un terreno circular de 25 m de diámetro con gravilla, echando 10 kg por cada metro cuadrado. ¿Cuánta gravilla se necesita?

28. Una escalera de 4 m de longitud está apoyada sobre una pared. El pie de la escalera dista 1,5 m de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared?

29. Calcula el área de la circunferencia circunscrita a un rectángulo de lados 7 y 9 cm.

30. Calcula el área de un hexágono regular de 3 cm de lado. Prolonga los lados del hexágono y dibuja un hexágono estrellado. Calcula su área.

31. La señal de tráfico de STOP tiene forma de octógono regular. Su altura mide 90 cm, y su lado 37 cm, ¿cuánto mide su superficie?

32. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 10 cm.

33. Calcula el área de un hexágono regular de perímetro 60 cm.

34. Calcula el área de un trapecio isósceles de base menor 5 cm, lado 3 cm y altura 4 cm.

35. Calcula el área de un trapecio isósceles de bases 8 y 6 cm y lado 3 cm.

36. Calcula el área y el perímetro de un rectángulo de lado 4 cm y diagonal 7 cm.

37. Calcula el área y el perímetro de un cuadrado de diagonal 9 cm.

38. Calcula el área y el perímetro de un triángulo isósceles de base 8 cm y altura 6 cm.

39. Un triángulo mide de altura π y de base $\pi + 1$. ¿Es rectángulo?

40. Dibuja un triángulo rectángulo isósceles de catetos de longitud 1, ¿cuánto mide la hipotenusa? Tomando dicha hipotenusa como cateto y con el otro cateto igual a 1 dibuja un nuevo triángulo rectángulo. ¿Cuánto mide la nueva hipotenusa? Continúa el proceso 4 veces, ¿cuánto mide la última hipotenusa?

41. Dibuja un triángulo rectángulo de catetos de longitud 1 y 2 cm, ¿cuánto mide la hipotenusa? Tomando dicha hipotenusa como cateto y con el otro cateto de longitud 1 cm dibuja un nuevo triángulo rectángulo. ¿Cuánto mide la nueva hipotenusa? Continúa el proceso 3 veces, ¿cuánto

Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Ilustraciones: Banco de imágenes INTEF y Pedro Luis Suberviola

mide la última hipotenusa?

42. Calcula la altura de una pirámide regular cuadrangular de lado de la base 10 m y de arista 15 m.

43. Calcula la generatriz de un como de radio de la base 5 m y de altura 7 m.

44. Dos ascetas hindúes viven en lo alto de un acantilado de 10 m de altura cuyo pié está a 200 metros del pueblo más cercano. Uno de los ascetas baja del acantilado y va al pueblo. El otro, que es mago, asciende una distancia x y viaja volando en línea recta al pueblo. Ambos recorren la misma distancia. ¿Cuánto ha ascendido el mago?

45. ¿Cuánto mide la arista de la base de la pirámide de Keops si mide 138 m de altura y 227 m de arista?

Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Ilustraciones: Banco de imágenes INTEF y Pedro Luis Suberviola

AUTOEVALUACIÓN

1. Todos los puntos que están a la misma distancia de dos puntos dados están en:

a) una bisectriz b) una circunferencia c) una elipse d) una mediatriz

2. Las tres medianas de un triángulo se cortan en el:

a) ortocentro b) baricentro c) incentro d) circuncentro

3. El circuncentro es el centro de:

a) gravedad del triángulo b) la circunferencia inscrita c) la circunferencia circunscrita

4. Dos triángulos son semejantes si:

a) tienen dos ángulos iguales b) tienen dos lados proporcionales

c) tienen un ángulo igual d) sus áreas son semejantes

5. Sabemos que los triángulos *ABC* y *A'B'C'* son semejantes. Calcula el valor de *a'* y *c'* para que lo sean, sabiendo que *a* = 10 cm, *b* = 6 cm, *b'* = 3 cm, *c* = 8 cm:

a) *a'* = 4 cm y *c'* = 6 cm b) *a'* = 5 cm y *c'* = 6 cm

c) *a'* = 4 cm y *c'* = 4 cm d) *a'* = 5 cm y *c'* = 4 cm

6. Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 7 cm y un cateto mide 3 cm, entonces el otro cateto mide aproximadamente:

a) 6,3 cm b) 5 cm c) 5,8 cm d) 6,9 cm

7. La suma de los ángulos interiores de un polígono irregular de diez lados vale:

a) 1440º b) 1620º c) 1800º d) 1260º

8. El área de un rombo de lado 5 cm y una diagonal de 8 cm mide:

a) 48 cm^2 b) 36,7 cm^2 c) 24 cm^2 d) 21,2 cm^2

9. El ángulo central del inscrito en la circunferencia que abarca un ángulo de 72º mide:

a) 720º b) 108º c) 36º d) 144º

10. La longitud de la circunferencia y el área del círculo de radio 3 cm son respectivamente:

a) 6π cm y 9π cm^2 b) 9π cm y 6π cm^2 c) 3π cm y 3π cm^2 d) 18 cm y 27 cm^2

Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Ilustraciones: Banco de imágenes INTEF y Pedro Luis Suberviola